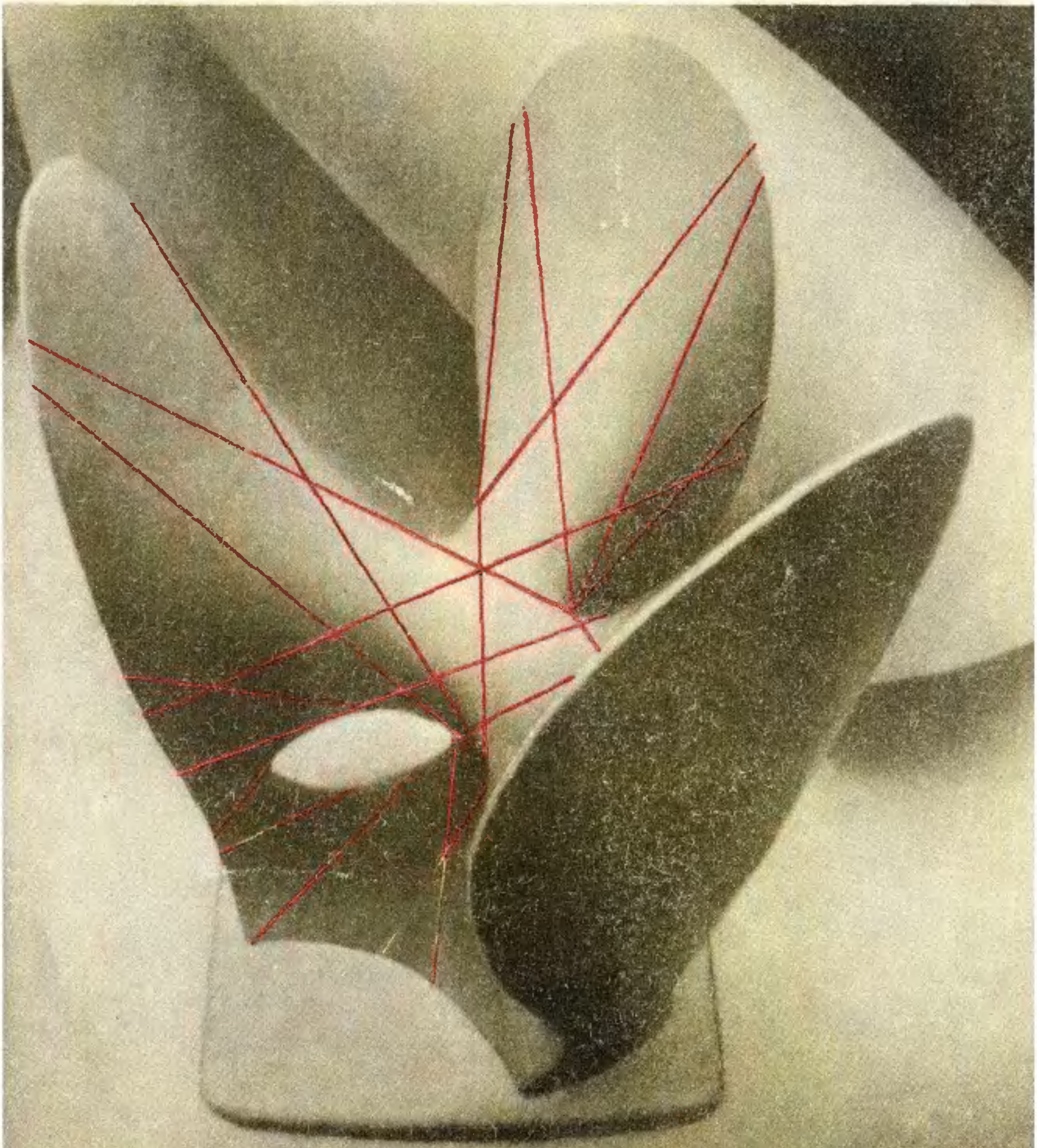
ISSN 0130-2221

Квант

9
1983

Научно-популярный физико-математический журнал
Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР



ВСТРЕЧА С ЧИТАТЕЛЯМИ

На физическом факультете МГУ состоялась встреча редколлегии и редакции нашего журнала с учащимися физико-математической школы-интерната № 18 при МГУ. На встрече выступил главный редактор «Кванта» академик И. К. Кикоин. Он рассказал о развитии физики в СССР, о том, как проблемы преподавания физики и математики в школе, а также перестройка школьного курса логически привели к необходимости создания в нашей стране специализированного научно-популярного журнала для школьников. Таким журналом и стал наш «Квант». Затем выступали школьники. Круг интересующих их вопросов оказался очень большим: что нового в астрофизике, как решается проблема управляемого термоядерного синтеза, как самому сделать лазер для домашней лаборатории и т. д. Были высказаны пожелания увидеть в «Кванте» статьи по теории относительности, квантовой механике, нелинейной оптике, а также по философским проблемам физики и психологии научного творчества. Пожелания наших читателей будут учтены при подготовке очередных номеров журнала.

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Квант **9** 1983

Основан в 1970 году

Издательство „Наука". Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ: / IN THIS ISSUE:

С новым учебным годом!

Дорогие друзья!

В старые времена на Руси праздник Нового года отмечали 1 сентября. Для всех нас, кто связан со школой, этот день по-прежнему означает начало нового года — года учебного. Давайте подумаем, почему мы в этот день с такой радостью и волнением переступаем порог школы? Не только потому, что там каждого ученика ждет встреча с друзьями, спортивные игры, рассказы друзей о лете. Главное заключается в том, что ежегодно 1 сентября миллионы ребят направляются в увлекательное и трудное путешествие в Страну знаний. Знания необходимы для каждого из нас потому, что мы живем в эпоху научно-технической революции, когда достижения наук непосредствено используются на практике, когда наука становится производительной силой.

В речи на июньском (1983 г.) пленуме ЦК КПСС Генеральный секретарь ЦК КПСС тов. Ю. В. Андропов подчеркнул: «В сфере экономической ключевая задача — кардинальное повышение производительности труда. Мы должны стремиться достичь в этом плане высшего мирового уровня... Главный путь к качественному сдвигу в производительных силах — это, конечно, переход к интенсивному развитию, соединение на деле преимуществ нашего социалистического строя с достижениями научно-технической революции. Причем ее самого последнего этапа, который сулит технологический переворот во многих сферах производства».

Процесс автоматизации и комплексной механизации производства, изменение самого характера труда требует основательной научной базы, широкой эрудиции исполнителей. Поэтому значение научной подготовки будущих специалистов производства в наше время растет с каждым днем.

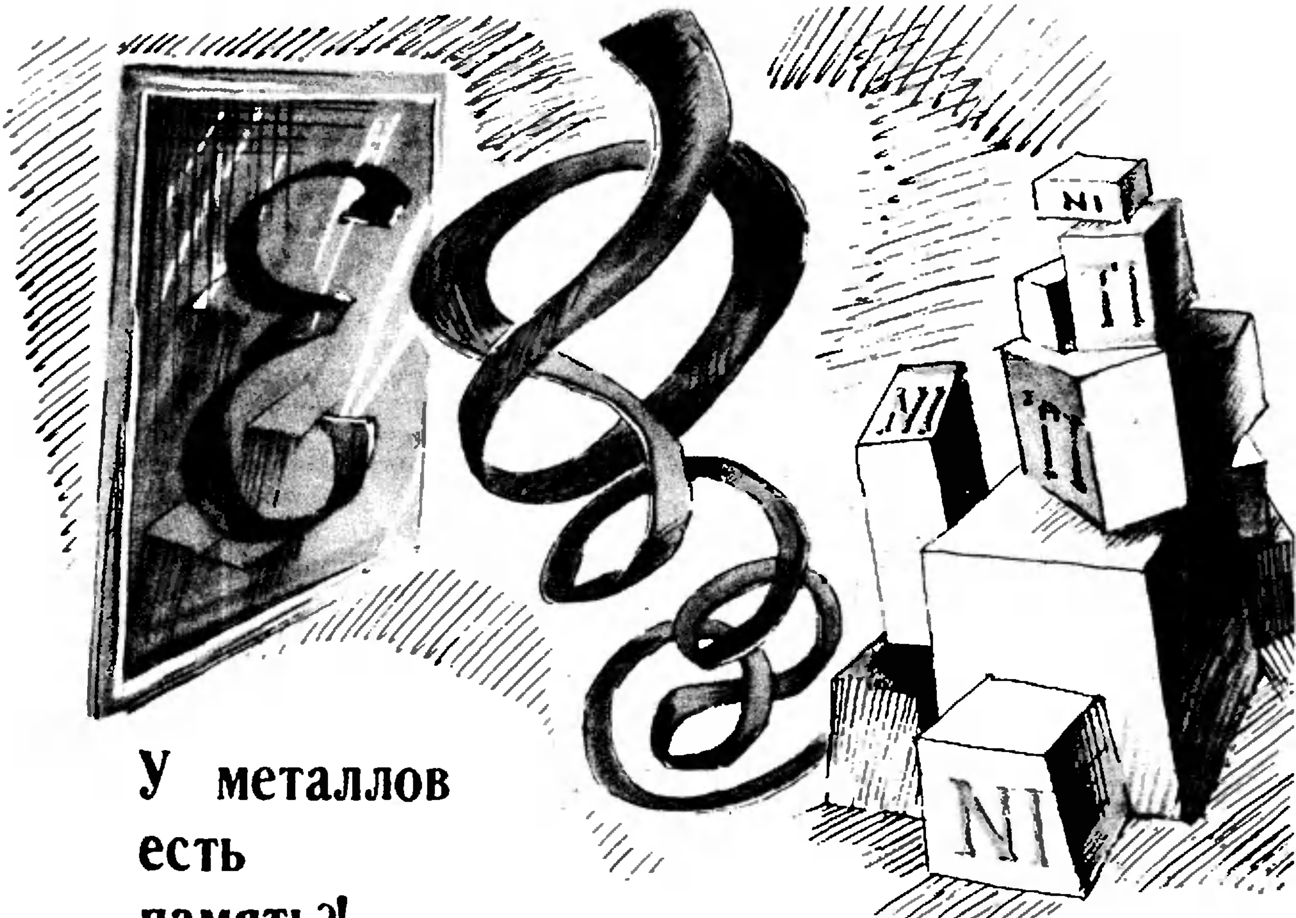
На протяжении всех школьных лет вас сопровождает «царица наук» — математика. Бурный процесс математизации знания и основанного на науке современного производства предъявляет высокие требования к математической подготовке выпускников школы. Это же в равной мере относится к физике — основе наук о природе, теоретической базе современной техники и технологии. Высокая физико-математическая подготовка школьников — залог достижения успехов в технике, экономике, обороне страны, непременное условие эффективной работы нашего общества по построению коммунизма.

Для нашего общества небезразличны люди с ярко выраженными интересами, склонностями и способностями к математике и физике. Школа помогает таким учащимся проявить свои дарования через систему кружковой работы, олимпиады, факультативные занятия, создает классы с углубленным изучением физики и математики. Именно таким школьникам адресован научно-популярный журнал «Квант».

Основательная физико-математическая подготовка школьников всегда была важным достижением советской школы. Не случайно достижения нашей школы в обучении математике и физике вызывают такой пристальный интерес специалистов за рубежом. В конечном счете именно в школе воспитывается сознательное отношение к труду и закладываются основы для соединения преимуществ социалистического строя с достижениями научно-технической революции.

Итак, начинается новый учебный год — год новых знаний и умений, новых опытов и задач, год более глубокого проникновения в любимую науку. Я поздравляю вас от всей души с этим праздником и желаю больших успехов в учебе и труде, в разумной, сознательной и целенаправленной подготовке к взрослой трудовой жизни!

Президент Академии педагогических наук СССР
академик АПН СССР М. И. Кондаков



У металлов есть память?!

Доктор физико-математических наук
В. А. ЗАЙМОВСКИЙ

Явления живой и неживой природы настолько многообразны и так тесно переплетены друг с другом, что, столкнувшись с чем-то новым в неорганическом мире, мы невольно ищем аналогию с проявлениями жизнедеятельности человека. Это стремление отражается и на научной терминологии. Такие термины, как «время жизни» или «время оседлой жизни» (применительно к частицам), «живучесть», «усталость» (применительно к конструкционным материалам), считаются вполне строгими и стали общепринятыми наряду с сотнями других, им подобных в этом смысле. И не случайно открытое сравнительно недавно свойство металлических сплавов получило название «память формы». Могут ли металлы вспоминать, помнить, забывать? Давайте попробуем приписать металлам эти способности живых существ, и тогда мы увидим, что металлы способны даже на самоубийство!

Упругая и пластическая деформация

Вначале вспомним, что нам известно из школьного курса физики о деформации металлов, и договоримся о некоторых обозначениях.

Если к металлическому образцу приложить нагрузку — внешнюю силу, которая сообщает ускорение одной части тела относительно другой, то образец изменит свои размеры и форму — деформируется. Деформацию обычно характеризуют отношением изменения Δl размера образца к исходному размеру l: $\varepsilon = \Delta l/l$. Удельной мерой нагрузки служит напряжение — отношение величины действующей на образец силы к площади поперечного сечения образца.

Связь между σ и ε определяется только свойствами материала и для обычных металлов и сплавов отображается кривой, приведенной на рисунке 1.

На участке *OA* зависимость $\sigma(\varepsilon)$ линейна. Эта закономерность была установлена еще в XVII веке английским ученым Гуком. Закон Гука $\sigma = E\varepsilon$ действует только в пре-

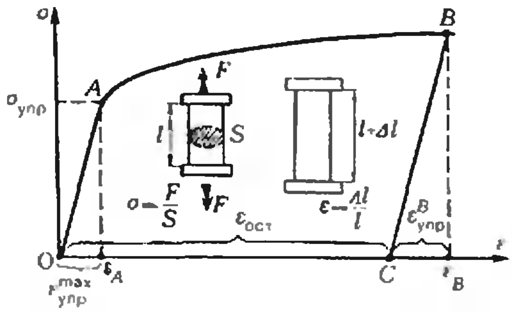


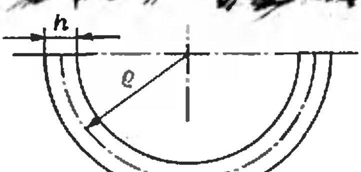
Рис. 1. Диаграмма напряжение — деформация.

делах «упругой области» диаграммы, пока напряжение не превысило предела упругости $\sigma_{упр}$. Константа E называется модулем упругости. Для большинства металлов E имеет порядок величины $10^{10}-10^{11}$ Н/м^2, а порядок $\sigma_{упр}$ обычно 10^7-10^8 Н/м^2; поэтому максимальная упругая деформация чаще всего имеет порядок величины 10^{-3}, то есть составляет десятые доли процента. Формальный признак упругой деформации — ее обратимость: деформация исчезает при разгрузке, и образец возвращается к исходным размерам и форме. Между прочим, это означает, что, находясь под любым напряжением, не превышающим $\sigma_{упр}$, металл помнит свою исходную форму и восстанавливает ее сразу после устранения нагрузки. Например, если мы изогнем тонкое стальное лезвие для бритья (толщина $h=0{,}08$ мм) в полукольцо радиуса $\varrho=10$ мм, то резкое изменение формы — налицо (рисунок 2), а деформация, тем не менее, еще остается упругой. Наружные слои металла при этом растянуты, а внутренние сжаты; максимальная величина относительной деформации равна $\varepsilon=h/2\varrho$ и составляет 0,4%, что для хорошей стали (у которой $\sigma_{упр}$ достигает 10^9 Н/м^2) еще не превышает $\varepsilon^{max}_{упр}$. Тогда при разгрузке лезвие вернется к исходной плоской форме, которую оно помнило, будучи согнутым в полукольцо. Линия разгрузки на диаграмме (см. рисунок 1) будет следовать прямой AO, и деформация уменьшится до нуля.

Упругая деформация связана с изменением расстояний между равновесными положениями атомов в кристаллической решетке. При разгрузке силы межатомного взаимодействия возвращают атом в исходные позиции, и форма тела восстанавливается. Но что произойдет, если мы увеличим нагрузку и напряжение превысит $\sigma_{упр}$, а деформация выйдет за пределы $\varepsilon^{max}_{упр}$? Упругая деформация продолжает нарастать прямо пропорционально растущей величине напряжения (в соответствии с законом Гука), но появляется вторая составляющая деформации — пластическая. Общая величина деформации, соответствующей некоторой точке B на рисунке 1, складывается теперь из $\varepsilon_{упр}$, которая исчезнет при разгрузке (линия разгрузки BC пойдет параллельно упругому участку AO), и $\varepsilon_{ост}$ — остаточной деформации, которая остается при снятии нагрузки. Из рисунка 1 видно, что $\varepsilon^B_{упр}$ больше $\varepsilon^{max}_{упр}$, поэтому символ «max» здесь не означает, что нельзя получить упругую деформацию большей величины. Он означает лишь, что если общая деформация превысит $\varepsilon^{max}_{упр}$, то она уже не будет чисто упругой и форма тела после разгрузки будет отличаться от исходной.

Таким образом, формальным признаком пластической деформации является ее необратимость: после разгрузки сохраняются остаточные изменения размеров, то есть память

а)



б)

Рис. 2. а) — изгиб пластины в пределах упругой деформации;
б) — пластический изгиб. Средний слой изогнутой пластины не деформирован, его длина равна $\pi\varrho$. Нижний слой растянут, его длина равна $\pi(\varrho+h/2)$.

$$\varepsilon=\frac{\pi(\varrho+h/2)-\pi\varrho}{\pi\varrho}=\frac{h}{2\varrho}.$$

металла начинает давать перебои. Если продолжать деформацию дальше, за точку B, то пластическая составляющая будет нарастать при сравнительно слабом росте напряжения. Конечно, в конце концов процесс закончится разрушением образца; величина $\varepsilon_{ост}$ перед разрушением у пластичных металлов составляет десятки процентов, то есть на 2 порядка превышает $\varepsilon_{упр}$. Это уже практически полный «склероз» — металл забывает исходную форму и принимает новую.

На такой забывчивости металлов основаны промышленные процессы их обработки, когда мы проделываем, например, путь от огромного слитка до тонкой проволочки. Если вернуться к нашему примеру с тонкой пластинкой, согнутой в полукольцо, но увеличить ее толщину до 2 мм, то деформация наружных слоев составит уже 10%. Теперь после разгрузки концы пластины лишь немного «спружинят», разойдутся в стороны (относительная деформация уменьшится на 0,5%), и пластина останется почти таким же полукольцом с чуть большим радиусом.

Когда говорят: «согнуть в бараний рог», имеют в виду именно такие большие деформации, при которых упругой составляющей уже можно пренебречь из-за ее малости по сравнению с остаточной. Между строк этого решительного выражения можно прочитать: «уже не разогнешься». Действительно, чтобы устранить последствия пластической деформации и вернуть тело к исходной форме, необходимо принудительно пластически деформировать его в противоположном направлении. Если же нагревать пластически деформированный металл, то форма его остается прежней — нет никаких причин для уменьшения или роста величины остаточной деформации.

Чтобы хорошо понять существо эффекта памяти формы в металлах, надо разобраться в механизме их пластической деформации. Точнее, нам понадобится рассмотреть лишь геометрический аспект этого механизма. Будучи телами кристаллическими, металлы пластически деформируются путем сдвигов

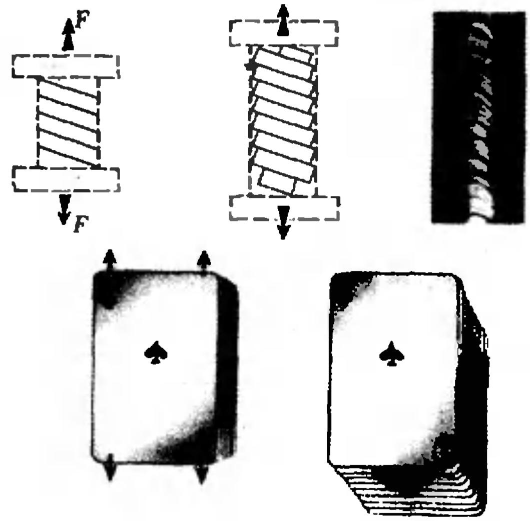


Рис. 3. Пластическая деформация осуществляется путем сдвигов. На фотографии — кристалл цинка после сильной пластической деформации (×50).

по определенным атомным плоскостям в решетке (рисунок 3). Это напоминает сдвиг в стопке монет или в колоде карт. Мы не можем увеличить размер колоды, потянув сразу все карты в продольном направлении, но длина колоды увеличится, если мы будем сдвигать вдоль нее карты одну за другой. Так же удлиняется при растяжении металлический стержень — происходит сдвиг соседних слоев металла друг по другу. Чтобы при этом не нарушалась сплошность металла, слои, разделенные плоскостями сдвига, постепенно разворачиваются в направлении действия нагрузки. Эти сдвиги, как мы уже знаем, необратимы; они и вызывают остаточную деформацию.

Открытие Г. В. Курдюмова и Л. Г. Хандроса

Существуют ли в металлах сдвиговые процессы, которые могут идти без воздействия внешней силы? Оказывается, существуют и уже 3000 лет используются человеком. Еще в древней Греции и Риме использовали явление закалки стали для придания ей особой твердости и прочности. Однако только в XX веке выяснилось, что это изменение свойств стали связано с превращением одной кристаллической модификации железа в другую.

Всем знакомы превращения с изменением агрегатного состояния вещества: при высоких температурах устойчиво газообразное состояние, при более низких температурах — жидкое, что и вызывает конденсацию (при достаточно большом давлении). При дальнейшем охлаждении вещество затвердевает, кристаллизуется, то есть его атомы располагаются в пространстве в строгом геометрическом порядке, образуя кристаллическую решетку. Конкретные типы решеток могут быть различными, причем многим металлам и сплавам свойственно явление полиморфизма — способность изменять тип решетки в зависимости от окружающей температуры, давления и т. д. Такие металлы и сплавы, охлаждаясь от температуры кристаллизации, испытывают полиморфные превращения: вещество остается в твердом состоянии, но его высокотемпературная модификация переходит в низкотемпературную, и порядок расположения атомов в пространстве меняется.

Есть два основных типа подобных превращений в твердом теле. Если температура еще достаточно высока (скажем, около половины от температуры плавления по абсолютной шкале) и атомы сравнительно подвижны, они способны обмениваться местами с соседями и перемещаться на расстояния, превышающие межатомные. В этом случае атомы как бы покидают свои позиции в старой решетке и поодиночке или небольшими группами пристраиваются к новой. Но если этот переход одной кристаллической решетки в другую идет при низких температурах, то характер атомных смещений меняется. Здесь уже атомы менее подвижны, они не могут менять соседей. Поэтому они попадают в новые положения, соответствующие другой решетке, в результате взаимно согласованных перемещений на малые расстояния. Геометрически эта ситуация близка к изображенной на рисунке 3: атомы в одном слое совместно смещаются относительно атомов другого слоя. Отличие лишь в том, что порядок упаковки атомов в соседних слоях разный — в одном слое они образуют решетку одного типа, а в другом — другого. Превращенная область в кристаллическом теле как бы испытывает сдвиг относительно соседней, в которой еще сохранилась старая решетка, а также относительно того участка с прежним порядком упаковки атомов, в котором она сама образовалась. Важно, что все это происходит без участия внешних сил — просто в результате понижения температуры. Превращения этого типа были названы мартенситными, а образующаяся в результате фаза с новой решеткой — мартенситом (в честь немецкого металловеда Мартенса; не путайте с Мартеном, изобретателем сталеплавильного процесса). Высокотемпературную фазу в железе и стали (а позднее, по аналогии, и в других сплавах) назвали аустенитом — в честь английского металлурга Аустена. Именно превращение аустенита в мартенсит ответственно за резкое изменение свойств стали при закалке. В сталях мартенситное превращение начинается обычно при температурах 400—600 К. Температуру начала этого превращения обозначают $M_н$ и называют мартенситной точкой. Хотя $M_н$ и не имеет такого строго определенного значения, как, скажем, температура плавления, при данном химическом составе сплава ее колебания, как правило, невелики.

Мартенситное превращение связано со значительными сдвиговыми смещениями атомов, но форма тела при закалке в целом не изменяется. Дело в том, что в ходе превращения мартенситная фаза разбивается на отдельные кристаллы, так чтобы направления сдвиговых смещений в соседних кристаллах были противоположны. Это снижает общий уровень напряжений, возникающих при мартенситном превращении из-за сильных деформаций решетки и различия в плотности двух участвующих в нем фаз. Упрощенно эта картина изображена на рисунке 4, *а*. Форма тела в целом не изменилась, но первоначально плоские поверхности стали ребристыми. На поверхности появился рельеф — непременный спутник мартенситного превращения.

В 1948 году один из крупнейших советских металлофизиков академик

Г. В. Курдюмов предсказал, а уже в следующем году вместе со своим сотрудником Л. Г. Хандросом (ныне доктором физико-математических наук) экспериментально наблюдал новый тип мартенситного превращения в алюминиевой бронзе. В 1980 году это было признано открытием. Авторы открытия получили соответствующий диплом, а само явление — название «эффект Курдюмова». Суть его в следующем. При благоприятном сочетании определенных условий (в частности, нужно, чтобы разница объемов фаз была небольшой) превращение аустенита (А) в мартенсит (М) приобретает особые черты. Оно становится, как выразился Г. В. Курдюмов, «термоупругим». Этот термин отражает многие необычные особенности такого мартенситного превращения. В частности, он подчеркивает то обстоятельство, что если прекратить охлаждение, то превращение сразу прекращается на той стадии, на которой его застигла температурная остановка, а если начать нагревать образец, то превращение вскоре начинает идти в обратную сторону. Это значит, что мартенсит снова превращается в аустенит, все сдвиговые смещения атомов идут в обратном направлении, а сами атомы возвращаются точно в свои исходные позиции, соответствующие решетке аустенита.

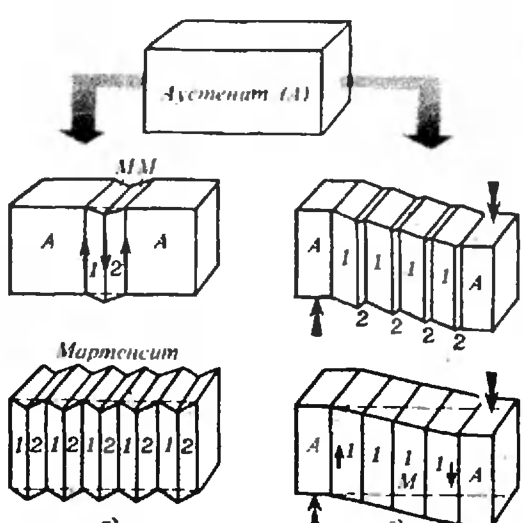


Рис. 4. Мартенситное превращение при охлаждении (а) и под действием нарастающей внешней силы (б).

В сплавах, испытывающих термоупругое превращение, приложением внешнего напряжения можно вызвать повышение температуры мартенситного превращения, но главное — в этих сплавах наличие внешней нагрузки особенно резко меняет геометрическую картину превращения. Если напряжение приложено так, как показано на рисунке 4, *б*, то увеличивается доля кристаллов *1*, в которых направление сдвиговых смещений атомов согласуется с направлением действия нагрузки, а доля кристаллов *2* уменьшается. В предельном случае при А → М-переходе реализуется только один вариант смещений атомов (рисунок 4, *б*), и мы получаем значительную общую деформацию образца, которая соответствует относительному удлинению 10% и более.

По своей величине эта деформация намного превышает $\varepsilon_{упр}^{max}$ обычных металлов, но она накапливается не за счет необратимых сдвигов, а за счет направленного превращения А → М. Внешняя сила упорядочивает смещения атомов при этом превращении. Если теперь вызвать обратное превращение М → А, то вся эта огромная деформация исчезнет, так как атомы возвращаются в исходное положение, которое они занимали в решетке аустенита.

Получается, что пластина, изготовленная из такого сплава и согнутая в кольцо, помнит исходную плоскую форму, причем может достаточно долго хранить ее в своей памяти. Процесс «вспоминания» реализуется при нагреве, и теперь мы уже можем «взывать к памяти» металла в то время и в той обстановке, когда нам это потребуется.

В настоящее время известны сотни сплавов, проявляющих эффект Курдюмова. Регулируя их состав, мы можем смещать интервал А → М → →А-превращений по температурной шкале. Например, сделаем так, чтобы мартенситная точка $M_н$ была немного ниже комнатной температуры, а $A_н$ — температура начала обратного М → А-превращения при нагреве — немного выше. Тогда небольшое напряжение, приложенное при комнатной температуре, вызовет превращение А → М и значительное изменение формы тела, а при нагреве на 50—100 °С оно вспомнит свою исходную форму. Можно «спустить» интервал превращений в глубокий холод. Тогда задавать новую форму нужно будет при низкой температуре, а вспоминать прежнюю форму металл будет в ходе отогрева до температуры окружающей среды. Интересно, что если мы будем препятствовать возвращению сплава к его первоначальной форме, то в нем возникают очень высокие напряжения. Скажем, изогнуть стержень вблизи $M_н$ можно грузом 10 Н, а при нагреве, стремясь выпрямиться, он сможет уже поднять груз 100 Н. Если же мы подвесим «непосильный» груз, то мучительно вспоминая свою прежнюю прямую форму, стержень иногда даже разрывается на части (самоубийство?!).

Как используют память металлов?

Возможности практического применения сплавов, обладающих уникальным свойством запоминать форму, исключительно разнообразны и заманчивы. Здесь перед конструкторами — широкое поле деятельности, усеянное принципиально новыми инженерными решениями. Например, в космической технике с помощью этих сплавов эффектно решается традиционная проблема экономии места в корабле. Свернутые или скрученные в компактную форму и уложенные в небольших нишах космического корабля антенны, излучатели энергии и т. п. распрямляются после запуска аппарата на орбиту от действия солнечного тепла. Сплавы с памятью можно использовать для создания космического радиотелескопа — компактный моток тонкой проволоки разворачивается при нагреве в круг диаметром около 2 км!

Конечно, запоминающим сплавам есть много применений и на Земле. Их способность поднимать грузы при нагреве открывает возможность создания двигателей прямого преобразования тепла в механическую работу. Модели таких двигателей уже построены. Их КПД невысок, но ведь для их работы можно использовать низкотемпературные источники тепла — солнечную энергию, тепловые отходы промышленных предприятий и т. п.

Это же свойство запоминающих сплавов нашло применение при создании соединения способом, заменяющим сварку, пайку и другие традиционные методы. Допустим, нам надо соединить две трубки для получения, скажем, топливопровода двигателя самолета. Берем втулку из низкотемпературного запоминающего сплава, внутренний диаметр которой на 4% меньше наружного диаметра соединяемых трубок (рисунок 5). В жидком азоте (—196 °С) деформируем втулку так, что ее внутренний диаметр становится на 4% больше наружного диаметра трубок. Теперь концы трубок мы можем ввести внутрь втулки, которая, отогреваясь до комнатной температуры, вспоминает прежнюю форму, сжимается и сжимает концы трубок, обеспечивая прочное герметичное соединение. Здесь используется совершенно необычная с инженерной точки зрения особенность проявления памяти металла. Ведь все нормальные, то есть «забывчивые», металлы при нагреве расширяются во всех направлениях. А запоминающий сплав мы заставили при нагреве сжиматься! Конечно, он сжимается только по двум осям, а по третьей — вдоль оси трубок — растягивается, так как объем материала втулки в ходе М → А-превращения меняется мало. Но в данном случае это

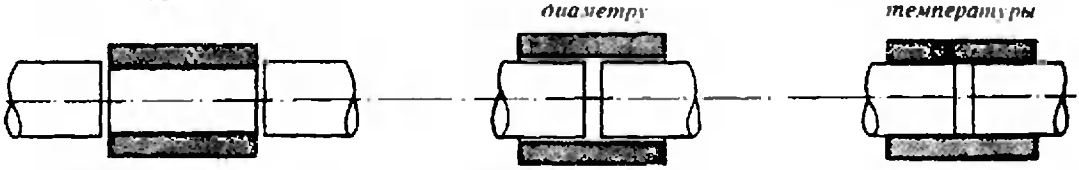


Рис. 5. Схема получения соединения с использованием муфты из сплава с памятью.

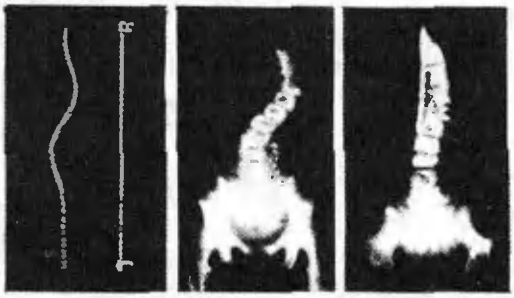


Рис. 6. Новый способ лечения сколиоза.

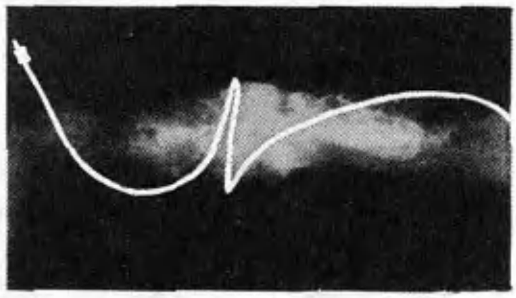


Рис. 7. Тромб, остановленный в кровеносном сосуде собаки фильтром из нитинола.

не мешает решению задачи; важно получить при нагреве уменьшение диаметра втулки, чтобы она сжала концы соединяемых трубок.

В авиации и кораблестроении уже установлены сотни тысяч таких соединений. Они показали высокую надежность и работают безотказно. А ведь надо учитывать, что технически это значительно проще, чем сваривать или паять. Можно легко выполнять такие соединения в труднодоступных или пожароопасных местах и даже в таких экзотических условиях, когда сварка или пайка вообще невозможны, — например, на дне моря.

Запоминающие сплавы используют и для создания разного рода автоматических терморегуляторов, срабатывающих при небольшом превышении заранее заданного значения температуры.

Интересны возможности использования этих сплавов в медицине. Их уже применяют при операциях, связанных со сращиванием костных переломов. Разрабатываются новые способы лечения такого заболевания, как сколиоз — искривление позвоночника. В организм больного оперативным путем вводят стержень, изогнутый так, что он повторяет неправильную форму позвоночника, и скрепляют его с позвоночным столбом. Стержень помнит заранее заданную ему форму правильного позвоночника и начинает восстанавливать ее при небольшом (не опасном и безболезненном для человека) повышении температуры (рисунок 6). Врач может легко регулировать ход лечения.

Другой пример — фильтры для улавливания тромбов (сгустков крови) в сосудах. Слегка охлажденная прямая тонкая проволочка вводится в нужное место кровеносного сосуда и там, отогреваясь до температуры тела, принимает ранее заданную ей причудливо-запутанную форму. Фильтр пропускает кровь, но задерживает тромб (рисунок 7), который, добравшись до сердца или мозга, мог бы привести к смертельному исходу.

Начаты работы по созданию искусственного сердца с использованием тонких проволок из запоминающих сплавов. В медицине, кроме памяти, используется еще и то обстоятельство, что некоторые из запоминающих сплавов, в частности сплав никеля и титана — нитинол, имеют очень высокую коррозионную стойкость и показали отличную совместимость с тканями живых организмов.

Нитинол не ржавеет, он легок и достаточно прочен. Не исключено, что в будущем из него будут, например, делать корпусы автомобилей. Такой автомобиль, даже после серьезного дорожного происшествия, восстановит форму кузова просто в результате легкого подогрева поврежденных мест.

Конечно, сейчас «автомобильный» прогноз выглядит, пожалуй, слишком смелым, так как запоминающие сплавы еще довольно дороги. Но ведь мы еще не знаем, чем нас завтра порадуют геологи.

Кватернионы

Доктор физико-математических наук
А. С. МИЩЕНКО,
кандидат физико-математических наук
Ю. П. СОЛОВЬЕВ

От редакции. В нынешнем году «Квант» много рассказывал о числах. О комплексных числах (№ 2, с. 16), об их истории (№ 6, с. 10), о представлении действительных чисел в виде цепных дробей (№ 5, с. 16 и № 6, с. 26), об алгебраических и трансцендентных числах (№ 7, с. 2). Завершает эту серию публикуемая ниже статья (не требующая, однако, знакомства с предыдущими). В ней речь идет о кватернионах — числах, содержащих комплексные, а значит и все остальные, числа. Вы узнаете немного о приложениях кватернионов и о своеобразной истории их создания, исходной точкой которой было желание внести алгебраическую структуру (сложение и, главное, умножение) в геометрические объекты (различные множества точек).

Как сделать из точек числа?

Если речь идет о точках на прямой — это просто. Выбрав начало отсчета («нуль») и масштаб с направлением («единицу»), можно получить из прямой числовую ось и тем самым превратить каждую точку в действительное число — ее координату (рис. 1).

С точками на плоскости сложнее. Выбрав начало отсчета («нуль») и пару перпендикулярных осей, можно сопоставить каждой точке на плоскости пару ее координат $(x; y)$. Чтобы каждую такую пару — *дуплет* — сделать числом, нужно научиться «складывать» и «умножать» эти дуплеты, причем так, чтобы сохранялись привычные свойства сложения и умножения (переместительный, сочетательный и распределительный законы, наличие обратных операций — деления и вычитания).

Со сложением просто. Дуплеты естественно складывать как векторы —

покоординатно (рис. 2):

$$(x;\ y)+(x';\ y')=(x+x';\ y+y'). \quad (1)$$

С умножением же дело обстоит хитрее*). Однако и здесь не очень сложная формула дает выход из положения:

$$(x;\ y)\cdot(x';\ y')=(xx'-yy';\ xy'+x'y). \quad (2)$$

Нетрудно проверить, что такое умножение дуплетов вместе со сложением (1) обладают выше упомянутыми «привычными свойствами». Таким образом, множество дуплетов с операциями (1), (2) можно считать полноценным числовым множеством.

На самом деле дуплеты — не что иное, как комплексные числа. Их чаще записывают не в виде $(x;\ y)$, а как $x+yi$, где i — мнимая единица (дуплет $(0;\ 1)$), обладающая замечательным свойством $i^2=i\cdot i=-1$, позволяющим (в области комплексных чисел) извлекать корни из отрицательных чисел. Подробнее о комплексных числах можно прочитать в статье Л. С. Понтрягина в «Кванте», 1983, № 2, с. 16.

А как превратить точки пространства в числа? Здесь снова, вводя систему координат, можно записывать точки в виде наборов их координат, но уже не двух, а трех: $(x;\ y;\ z)$. Такие тройки, или *триплеты*, естественно складывать покоординатно:

$$(x;\ y;\ z)+(x';\ y';\ z')=(x+x';\ y+y';\ z+z'). \quad (3)$$

Триплеты можно будет считать числами, если найдется способ их умножения, обладающий, вместе со сложением (3), обычными свойствами этих операций. В частности, обратной к умножению операцией (делением на ненулевые элементы).

Так все-таки, как умножаются триплеты? В 1833 г. этой задачей заинтересовался ирландский математик Уильям Роуан Гамильтон (1805—1865). Но об этом незаурядном человеке стоит рассказать особо.

*) Покоординатное умножение $(x;\ y)(x';\ y')=(xx';\ yy')$ ничего хорошего не дает: для такой операции нет обратной операции (невозможно, к примеру, деление на ненулевой дуплет $(0;\ 2)$).

Рис. 1.

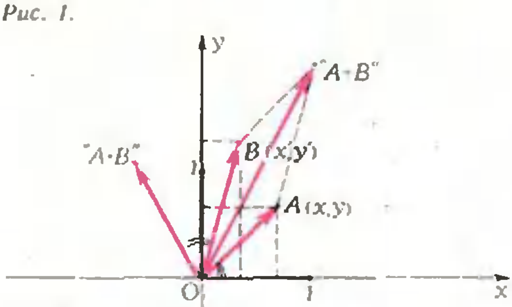


Рис. 2.

У. Р. Гамильтон

Гамильтон обладал блестящими и многосторонними способностями. В десять лет он знал наизусть много стихов Гомера, в четырнадцать лет владел девятью языками, в 1824 г. опубликовал в трудах Королевской Ирландской Академии работу, посвященную геометрической оптике, в 1827 г. получил звание королевского астронома Ирландии.

К 1833 г. Гамильтон занимал пост директора обсерватории в Денсинке (около Дублина) и был известен как автор ряда работ по оптике и аналитической механике. Исходя из своих работ по геометрической оптике, Гамильтон предсказал эффект двойной конической рефракции в двуосных кристаллах, который вскоре был обнаружен его коллегой Ллойдом.

В течение долгих десяти лет Гамильтон безуспешно пытался придумать правило умножения триплетов. Позже в письме к сыну он вспоминал: «Каждое утро..., когда я спускался к завтраку, ты и твой брат Уильям Эдвин обычно спрашивали меня: «Ну как, папа, ты уже умножаешь триплеты?» На что я всегда был вынужден печально отвечать: «Нет, я умею лишь складывать и вычитать их.»

Векторное произведение

Задача, которую решал Гамильтон, поначалу казалась несложной. Как складывать векторы — ясно (по формуле (3)), остается «только» найти формулу их умножения — что-нибудь вроде формулы (2) для умножения дуплетов. Но все формулы, которые перепробовал Гамильтон, упорно не подходили — то нарушалось одно из обычных свойств, то другое.

Уже тогда была хорошо известна операция векторного произведения:

векторным произведением $v_3 = v_1 \times v_2$ ненулевых векторов v_1, v_2 называется вектор, перпендикулярный плоскости, проходящей через векторы v_1, v_2, имеющий направление, определяемое правилом правой руки» (рис. 3), и длину $|v_1| \cdot |v_2| \cdot \sin(v_1, v_2)$. Для дальнейшего заметим, что если векторы v_1, v_2 заданы своими координатами в прямоугольной системе координат:

$$v_1 = (\alpha_1;\ \beta_1;\ \gamma_1)$$
$$v_2 = (\alpha_2;\ \beta_2;\ \gamma_2),$$

то

$$v_1 \times v_2 = (\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1;\ \gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1;\ \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1). \tag{4}$$

Но операция векторного произведения не годилась Гамильтону, поскольку она не имеет обратной. Например, если $v_1 = v_2 \neq \mathbf{0}$, то угол (v_1, v_2) между этими векторами равен нулю. Значит, длина векторного произведения $v_3 = v_1 \times v_2$ равна нулю, то есть и сам вектор v_3 нулевой. Если бы операция деления на ненулевой вектор существовала всегда, то мы имели бы $(v_1 \times v_2) : v_2 = v_1 \neq 0$, *в то время как* $v_1 \times v_2 = 0$ *и, значит,* $(v_1 \times v_2) : v_2 \neq 0$. Получившееся противоречие показывает, что деление на v_2 невозможно.

Не может не вызвать уважения и восхищения то, что, несмотря на разочарование и неудачи, Гамильтон не оставлял надежды и в течение десяти лет с завидным упорством пытался решить поставленную перед собой задачу. И хотя задача так и не была решена (и не могла быть решена — почему, мы объясним позже), десятилетний труд не пропал даром. В один прекрасный день 1843 года Гамильтон вдруг решил для определения умножения рассматривать не триплеты (тройки чисел), а четверки, или, как он их тут же окрестил, кватернионы. Вот как это произошло.

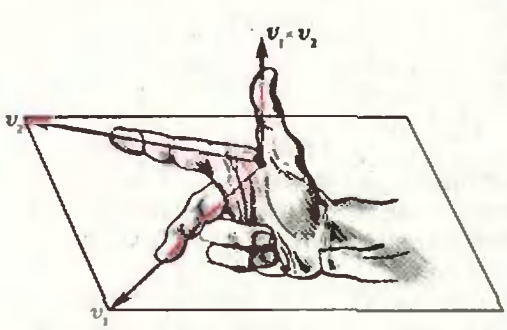


Рис. 3.

Случай на Брогемском мосту

В одном из писем к своему сыну, написанном в свойственном тому времени несколько высокопарном стиле, Гамильтон вспоминал: «Это был 16-й день октября, который случился в понедельник, в день заседания Совета Королевской Ирландской Академии, где я должен был председательствовать. Я направлялся туда с твоей матерью вдоль Королевского канала; и, хотя она говорила мне какие-то отдельные фразы, я их почти не воспринимал, так как в моем сознании подспудно что-то творилось. Неожиданно как будто бы замкнулся электрический контур; блеснула искра, предвещающая многие длинные годы определенно направленной мысли и труда, моего — если доведется, или труда других, если мне будет даровано достаточно сознательной жизни, чтобы сообщить о своем открытии. Я оказался не в состоянии удержаться от желания высечь ножом на мягком камне Брогемского моста фундаментальную формулу о символах i, j, k,

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

содержащую решение проблемы, но, конечно, эта запись с тех пор стерлась. Однако более прочное упоминание осталось в Книге записей Совета Академии за этот день, где засвидетельствовано, что я попросил и получил разрешение на доклад о *кватернионах на первом заседании* сессии, который и был прочитан соответственно в понедельник 13-го следующего месяца — ноября».

Определение кватернионов

Кватернионы — это четверки действительных чисел $(x;\ y;\ u;\ v)$, которые удобно записывать в виде

$$q = x + yi + uj + vk,$$

x	i	j	k
i	-1	k	j
j	-k	-1	i
k	-j	-i	-1

Рси. 4.

где i, j, k — новые числа, являющиеся аналогом мнимой единицы в комплексных числах. Требуется, чтобы числа i, j, k удовлетворяли следующим соотношениям:

$$i^2=j^2=k^2=-1, \tag{5}$$

$$ij=-ji=k,\ jk=-kj=i,\quad ki=-ik=j, \tag{6}$$

которые удобно записать в виде «таблицы умножения» (рис. 4).

По определению операции сложения и умножения кватернионов производятся по обычным правилам раскрытия скобок и приведения подобных членов с учетом правил (5) — (6).

Согласно этому определению, если q_1 и q_2 — два кватерниона, то

$$q_1+q_2=(x_1+y_1i+u_1j+v_1k)+(x_2+y_2i+u_2j+v_2k)=x_1+y_1i+u_1j+v_1k+x_2+y_2i+u_2j+v_2k=(x_1+x_2)+(y_1i+y_2i)+(u_1j+u_2j)+(v_1k+v_2k)=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i+(u_1+u_2)j+(v_1+v_2)k. \tag{7}$$

Это, разумеется, привычное нам «покоординатное» сложение. Далее, произведение кватернионов q_1 и q_2 вычисляется так:

$$q_1q_2=(x_1+y_1i+u_1j+v_1k)\,(x_2+y_2i+u_2j+v_2k)=x_1x_2+x_1y_2i+x_1u_2j+x_1u_2k+y_1x_2i+y_1y_2i^2+y_1u_2ij+y_1v_2ik+v_1x_1k+v_1y_2ki+v_1u_2kj+v_1v_2k^2=x_1x_2+x_1y_2i+x_2u_2j+x_1v_2k+y_1x_2i-y_1y_2+y_1u_2k-y_1v_2j+u_1x_2j-u_1y_2k-u_1u_2+u_1v_2i+v_1x_2k+v_1y_2j-v_1u_2i-v_1v_2=(x_1x_2-y_1y_2-u_1u_2-v_1v_2)+(x_1y_2+y_1x_2+u_1v_2-v_1u_2)i+(x_1u_2+u_1x_2-y_1v_2+v_1y_2)j+(x_1v_2+v_1x_2+y_1u_2-v_1y_2)k. \tag{8}$$

Длинная, но совершенно автоматическая проверка показывает, что умножение кватернионов обладает сочетательным свойством:

$$(q_1q_2)q_3=q_1(q_2q_3).$$

Естественно считать, что действительные и комплексные числа являются частным случаем кватернионов. Так, действительное число x — это кватернион вида

$$x=x+0\cdot i+0\cdot j+0\cdot k.$$

Комплексное число $z=x+iy$ представляется как кватернион

$$z=x+iy=x+iy+0\cdot j+0\cdot k. \tag{9}$$

Читатель, не знакомый с комплексными числами, не должен смущаться: он может считать формулу (9), вместе с формулами (7) и (8), определением комплексного числа. Ему также будет полезно написать формулу умножения (8) для случая (9) и сравнить с формулой (2).

У операции сложения кватернионов, очевидно, имеется обратная операция — вычитание. Именно, разность двух кватернионов q_1 и q_2 определяется формулой

$$q_1-q_2=(x_1-x_2)+(y_1-y_2)i+(u_1-u_2)j+(v_1-v_2)k.$$

Если $q_1=q_2$, то разность q_1-q_2 — это нулевой кватернион, равный

$$q_1-q_2=0+0\cdot i+0\cdot j+0\cdot k=0.$$

Деление кватернионов

Перейдем теперь к операции деления кватернионов, обратной к операции умножения. Вообще, что мы понимаем под частным от деления числа a на число $b\neq 0$? Это такое число c, что

$$bc=a. \tag{10}$$

Так определяется частное от деления для действительных и комплексных чисел. К сожалению, для кватерниона применить непосредственно это определение мы не можем. И дело здесь вот в чем. Для того чтобы формула (10) «корректно» определяла частное, нужно, чтобы произведение не зависело от порядка сомножителей. В противном случае наряду с частным $c=b^{-1}a$, определенным формулой (10), существует вполне равноправное «левое» частное» c', определяемое формулой

$$c'b=a,$$

которое может отличаться от «правого частного» c из (10). Вот здесь, кроме необходимости выйти за пределы трехмерного пространства, Гамильтону пришлось принести еще одну жертву.

Оказывается, определенные им новые числа — кватернионы — потеряли еще одно привычное качество: произведение кватернионов зависит от порядка сомножителей. Действительно, уже в формулах (6) при изменении порядка множителей произведение меняет знак.

Таким образом, можно говорить лишь о «делении слева» и «делении справа». Как реально найти, скажем, «левое частное» от деления кватерниона q_1 на кватернион $q_2 \neq 0$?

Обозначим искомое частное через $q = x + yi + uj + vk$. Тогда, используя правило умножения для кватернионов и определение левого частного, получим следующее равенство кватернионов:

$$qq_2 = q_1$$

или

$$\begin{aligned}(xx_2 - yy_2 - uu_2 - vv_2) &+ \\ + (xy_2 + yx_2 + uv_2 - vu_2)i &+ \\ + (xu_2 + ux_2 - yv_2 - vy_2)j &+ \\ + (xv_2 + vx_2 + yu_2 - uy_2)k &= \\ = x_1 + y_1 i + u_1 j + v_1 k&.\end{aligned}$$

Полученное равенство равносильно системе четырех линейных уравнений с переменными x, y, u, v:

$$\begin{aligned} x_2x - y_2y - u_2u - v_2v &= x_1 \\ y_2x + x_2y + v_2u - u_2v &= y_1 \\ u_2x - v_2y + x_2u - y_2v &= u_1 \\ v_2x + u_2y - y_2u + x_2v &= v_1. \end{aligned}$$

Предлагаем читателю в качестве упражнения решить эти систему и тем самым найти «левое частное» от деления q_1 на q_2. Аналогичным образом находится «правое частное» от деления q_1 на q_1.

Рассмотрим частный случай, когда делимое q_1 равно действительному числу 1. В этом случае частное от деления $q_1 = 1$ на кватернион q_2 (и «слева» и «справа») равно одному и тому же кватерниону

$$p = \frac{x_2 - y_2 i - u_2 j - v_2 k}{x_2^2 + y_2^2 + u_2^2 + v_2^2}$$

(докажите!). Поэтому кватернион p обозначается через

$$q^{-1} = \frac{x_2 - y_2 i - u_2 j - v_2 k}{x_2^2 + y_2^2 + u_2^2 + v_2^2}.$$

Тогда «правое частное» от деления кватерниона q_1 на ненулевой кватернион q_2 выражается формулой

$$q = q_2^{-1} \cdot q_1,$$

а «левое частное» от деления кватерниона q_1 на q_2 — формулой

$$q = q_1 \cdot q_2^{-1}.$$

Практически частное от деления двух кватернионов ищется другим путем. Для этого нам потребуются

Скалярные и векторные кватернионы

Так же как комплексные числа разлагаются в сумму своей действительной и мнимой частей, кватернион

$$q = x + yi + uj + vk$$

тоже можно разложить в сумму

$$q = x + (yi + uj + vk).$$

Первое слагаемое в этом разложении называется *скалярной частью* кватерниона, а второе слагаемое — *векторной частью*. Скалярная часть x — это просто действительное число, а векторная часть $yi + vj + vk$ может быть изображена вектором

$$\boldsymbol{r} = yi + vj + vk$$

в трехмерном пространстве, где i, j, k мы теперь рассматриваем как единичные векторы прямоугольной системы координат (рис. 5).

Таким образом, каждый кватернион q представляется в виде суммы

$$q = x + \boldsymbol{r},$$

где x — скалярная часть кватерниона q, а $\boldsymbol{r}$ — векторная часть. Если $\boldsymbol{r} = 0$, то $q = x$ и кватернион q называется *скалярным кватернионом*. Если же $x = 0$, то $q = \boldsymbol{r}$ и q называется *векторным кватернионом*.

При сложении кватернионов независимо складываются их скалярные и векторные части.

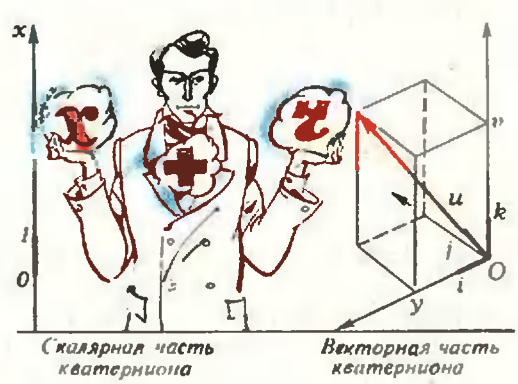


Рис. 5.

При умножении кватернионов дело обстоит сложнее. Если q_1 и q_2 — скалярные кватернионы, то их произведение q_1q_2 тоже скалярный кватернион. В случае, когда $q_1=x$ — скалярный кватернион, а $q_2=\boldsymbol{r}$ — векторный кватернион, произведение

$$q_1q_2=x\cdot(yi+uj+vk)=(xy)i+(xu)j+(xv)k$$

является векторным кватернионом и операция умножения совпадает с умножением вектора $\boldsymbol{r}$ в пространстве на действительное число x.

И наконец, если оба кватерниона векторные:

$$q_1=\boldsymbol{r}_1=y_1i+u_1j+vk$$
$$q_2=\boldsymbol{r}_2=y_2i+u_2j+v_2k,$$

то

$$q_1q_2=-(y_1y_2+u_1u_2+v_1v_2)+(u_1v_2-v_1u_2)i+(v_1y_2-y_1v_2)j+(y_1u_2-u_1y_2)k.$$

Как видно из последней формулы, скалярная часть произведения q_1q_2 равна скалярному произведению $(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ векторов $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ с обратным знаком. Векторная же часть q_1q_2 — это наш старый знакомый — векторное произведение $\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2$, записанное в координатах (см. (4)).

Объединяя все рассмотренные случаи, получим общую формулу для умножения кватернионов. Если $q_1=x_1+\boldsymbol{r}_1$ и $q_2=x_2+\boldsymbol{r}_2$, то

$$\boxed{q_1q_2=(x_1x_2-\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2)+(x_1\boldsymbol{r}_2+x_2\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2)}$$

А как же триплеты?

Почему Гамильтону все-таки не удалось найти удовлетворительного способа для умножения триплетов? Не из-за недостаточного остроумия или трудолюбия — выше мы уже отмечали, что задачу построения «трехмерных чисел» решить нельзя. Действительно, доказано, что попросту не существует способа умножения точек пространства, удовлетворяющего нашим требованиям (ассоциативности, дистрибутивности относительно покоординатного сложения, возможности деления на ненулевые элементы). Более того, сейчас известны все случаи, когда можно ввести такое умножение. Как, доказал немецкий математик Ф. Г. Фробениус (1849—1917), этих случаев три: в размерности один (обычные действительные числа), в размерности два (комплексные числа) и в «размерности четыре» (кватернионы).

Что было дальше

Гамильтон и его последователи возлагали большие надежды на кватернионы. От кватернионов ожидали таких же результатов, как от комплексных чисел, и даже больше. И действительно, с помощью исчисления кватернионов были обнаружены совершенные в их математической красоте формулы, описывающие ряд важных физических явлений. Но дальнейшие надежды на развитие алгебраического и функционального исчисления кватернионов не оправдались.

Для кватернионов не имеет места основная теорема алгебры о существовании корней у многочлена с кватернионными коэффициентами, а, с другой стороны, существует такой многочлен с кватернионными коэффициентами от одной переменной, для которого любой кватернион является корнем.

Оптимизм сменился скепсисом. В начале нашего века математики перестали интересоваться кватернионами. Но время шло, и физики упорно искали математический формализм для некоторых эффектов, связанных с так называемым *спином* элементарных частиц. Кватернионы снова получили признание, когда была понята их роль в построении различных геометрических преобразований пространства, используемых в квантовой физике. Геометрические свойства кватернионов — это особая большая тема, о которой мы надеемся рассказать в дальнейшем.

Почему вода выливается из ведра?

Е. Н. КУДРЯВЦЕВА,
С. С. ХИЛЬКЕВИЧ

Мы хотим привести пример того, как иногда за объяснение принимается то, что в действительности ничего не объясняет. Такие ситуации в физике встречаются нередко, но случай, о котором будет идти речь, особенно интересен своей простотой. Дело касается явления, с которым мы сталкиваемся настолько часто, что нам не приходит в голову задуматься над ним. Но стоит присмотреться чуть-чуть внимательнее — и начинаются странные вещи...

Впрочем, судите сами.

«Загадка»

Опять ничего не могу я понять,
Опилки мои в беспорядке.
Везде и повсюду, опять и опять
Меня окружают загадки.

А. А. Милн. «Винни-Пух и все-все-все».

Трудно сосчитать, сколько раз вам приходилось выливать воду из ведер, стаканов, кувшинов и прочих сосудов. А задумывались ли вы хоть раз, почему она оттуда выливается?

Мы предвидим недоумение: «А над чем тут думать? Это же совершенно ясно! На воду действует сила тяжести, и если сосуд перевернуть, то под действием этой силы вода потечет вниз. Что тут может быть непонятного?»

Проделаем несколько несложных экспериментов, которые покажут вам, что не все так просто.

Опыт 1. Наливаем воду в стакан и переворачиваем его вверх дном. Как и следовало ожидать, вода выливается.

Опыт 2. Наливаем воду в тот же стакан, накрываем его листком бумаги, плотно прижимаем листок к краю стакана, переворачиваем стакан и отпускаем листок. Вода не выливается.

Этот опыт хорошо известен, и объясняется он просто: вода не выливается потому, что этому препятствует атмосферное давление. Под действием веса воды листок прогибается, уровень воды в перевернутом стакане понижается, объем, занимаемый в стакане воздухом, увеличивается, поэтому давление воздуха уменьшается и становится ниже атмосферного (рисунок 1). Разность сил давления атмосферного воздуха и воздуха внутри стакана направлена вверх и уравновешивает силу тяжести, действующую на воду. Вот вода и не выливается, хотя за исключением листка бумаги условия этого опыта — размеры сосуда, количество наливаемой воды, атмосферное давление, температура и т. д. — полностью повторяют условия опыта 1.

Опыт 3. Наливаем воду во флакон из-под духов и переворачиваем его. Вода не выливается.

Результат этого опыта широко известен, но обычно ему не придают значения. Однако если обратить на него внимание, то после некоторого размышления проблема вытекания жидкости из перевернутого сосуда перестанет казаться простой.

В самом деле, возникает какая-то странная ситуация. Сила тяжести на воду действует, а вода не выливается, хотя, казалось бы, ничто ее не удерживает. Это непонятно.

Правда, у нас уже есть пример аналогичной ситуации — это опыт 2. Но если по аналогии с опытом 2 попытаться объяснить невыливание воды в опыте 3 действием атмосферного давления, то моментально возникает вопрос: почему атмосферное давление удерживает воду в перевернутом флаконе, но не может удержать ее в перевернутом стакане? И дальше лавина вопросов начинает стремительно нарастать.

Зачем нужен листок в опыте 2? Почему атмосферное давление удерживает воду в перевернутом стакане с листочком, но не может удержать такое же количество воды в том же стакане без листочка? При каких условиях атмосферное давление может удержать воду в перевернутом сосуде без листка бумаги? Почему эти условия выполняются во флаконе и почему они не выполняются в ведре? Иными словами, почему вода выливается из ведра?

Видите, все не так просто. И если вы попытаетесь найти ответы на эти вопросы самостоятельно, то задуматься придется надолго.

Вернемся теперь к объяснению «вода выливается потому, что действует сила тяжести». Недостаточность этого объяснения совершенно очевидна. Хотя бы потому, что оно не учитывает влияния атмосферного давления. С точки зрения такого объяснения результаты опытов 2 и 3 совершенно непонятны: сила тяжести действует, а вода не выливается.

Вот и возникла ситуация, о которой мы говорили в начале статьи: привычное объяснение на самом деле не является объяснением, и надо искать что-то другое. Этим мы сейчас и займемся.

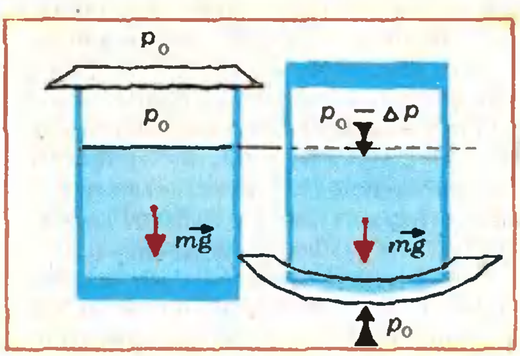


Рис. 1.

Разгадка

Наконец Грифон сказал Деликатесу: «Ну ладно, старик, давай. Поехали. Нельзя же весь день толочь воду в ступе».

Л. Кэрролл. «Алиса в стране чудес».

Вы уже почувствовали, что с помощью только атмосферного давления и силы тяжести объяснить процесс вытекания жидкости не удается. Нужно учитывать еще один фактор — поверхностное натяжение.

Какую же роль играет поверхностное натяжение при выливании жидкости из сосуда? Оказывается, оно определяет свойства волн на нижней поверхности перевернутой жидкости. От поведения этих волн и зависит, выльется жидкость или нет. Немного позже мы проведем количественный анализ, а пока расскажем о происходящем на качественном уровне.

Вы знаете, что волны, возникающие на свободной поверхности жидкости, постепенно затухают. Это происходит из-за внутреннего трения в жидкости, которое называют вязкостью. Но если жидкость находится в перевернутом сосуде, то волны на ее нижней свободной поверхности при определенных условиях не затухают; наоборот, амплитуда волн возрастает. Такие волны мы в дальнейшем будем называть неустойчивыми.

Если на нижней поверхности жидкости создаются условия для возникновения неустойчивой волны, то жидкость выльется из перевернутого сосуда, как это происходит в опыте 1. Если с помощью листа бумаги воспрепятствовать возникновению таких волн, как это было сделано в опыте 2, то атмосферное давление удержит воду и она не вытечет. В опыте 3 неустойчивая волна не возникает, амплитуда волн на нижней поверхности убывает с течением времени, и вода не вытекает.

При каких условиях возникает неустойчивая волна? Ответ на этот вопрос будет получен в следующем параграфе, но, забегая немного вперед, скажем, что решающее значение имеет длина волны. Если она меньше некоторого критического значения, то волна постепенно затухает, если больше — волна неустойчива. Это объясняет, почему вода не выливается из флакона и других сосудов с узким горлом: если диаметр отверстия меньше критической длины, то неустойчивые волны не возникают — они просто «не помещаются» в отверстии с маленьким диаметром.

Подчеркнем, что основным «удерживающим» фактором является атмосферное давление. Причина выливания воды — возникновение на нижней поверхности перевернутой жидкости неустойчивой волны.

Займемся теперь более подробным изучением неустойчивых волн.

Немного математики

Даже немножечко,
чайная ложечка,
— это уже хорошо!

А. А. Милн. «Винни-Пух и все-все-все».

К сожалению, полный анализ процессов, происходящих на нижней поверхности перевернутой жидкости, довольно сложен. Поэтому мы ограничимся рассмотрением упрощенной модели, которая, тем не менее, дает возможность разобраться в происходящем.

Представим себе, что мы перевернули сосуд, накрытый листом бумаги, и силы атмосферного давления уравновесили силу тяжести, действующую на воду (это происходило в опыте 2). Представим теперь, что лист бумаги мгновенно исчез, и на нижней границе жидкости образовалась свободная поверхность. В первый момент атмосферное давление еще удерживает жидкость, но в силу случайных колебаний воздуха и сосуда на невозмущенной поверхности начинают образовываться волны. Поведение этих волн и будет интересовать нас в первую очередь.

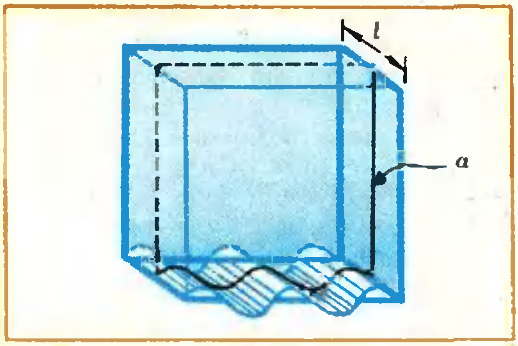


Рис. 2.

Мы рассмотрим только один тип волн: плоские волны в сосуде с отверстием прямоугольной формы. При этом мы будем предполагать, что сечение волны плоскостью a, изображенной на рисунке 2, состоит из полуокружностей радиуса R. Этот тип волн выбран в основном из соображений простоты расчетов. Рассмотрение других типов волн приводит к аналогичным выводам.

При возникновении на нижней поверхности жидкости волны меняется поверхностная энергия жидкости и ее потенциальная энергия.

Как мы уже говорили, свойства волн на нижней поверхности жидкости определяются поверхностным натяжением. При возникновении волны площадь свободной поверхности увеличивается. Следовательно, увеличивается поверхностная энергия.

Напомним, что молекулы на поверхности обладают большей энергией, чем молекулы внутри жидкости. Силы притяжения, действующие на молекулу внутри жидкости со стороны ее соседей, направлены во все стороны, и их равнодействующая равна нулю. А равнодействующая сил притяжения, действующих на молекулу на поверхности жидкости, не равна нулю. Для перемещения молекулы из глубины на поверхность необходимо совершить работу против этой силы. Следовательно, молекулы вблизи поверхности обладают некоторым избытком энергии по сравнению с молекулами, находящимися внутри жидкости. Этот

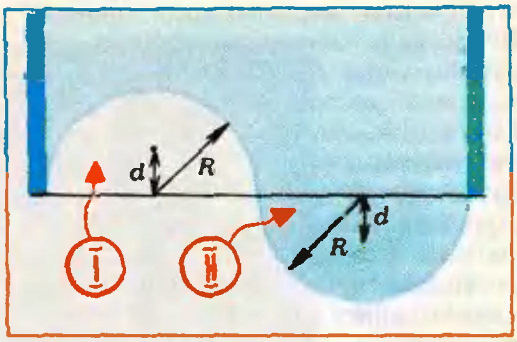


Рис. 3.

избыток и называют поверхностной энергией. Понятно, что поверхностная энергия пропорциональна площади поверхности: $W=\sigma S$, где коэффициент пропорциональности σ называется коэффициентом поверхностного натяжения.

Представим себе, что на нижней поверхности жидкости в перевернутом сосуде образовалась волна, длина которой равна линейному размеру отверстия в сосуде (рисунок 3). Подсчитаем изменение энергии жидкости, то есть разницу между энергиями до и после возникновения волны.

Площадь поверхности жидкости (см. рисунок 3) увеличилась на

$$\Delta S=S_2-S_1=4\pi Rl-4Rl.$$

Увеличение поверхностной энергии за счет увеличения площади поверхности равно

$$\Delta W_1=\sigma(2\pi Rl-4Rl)=2\sigma(\pi-2)Rl.$$

С другой стороны, при возникновении волны часть жидкости опустилась, и соответствующее изменение потенциальной энергии равно

$$\Delta W_2=-mgh,$$

где m — масса опустившейся жидкости, h — расстояние, на которое опустился ее центр тяжести, g — ускорение свободного падения (минус в этой формуле означает, что изменение энергии отрицательно, то есть энергия уменьшилась).

Массу опустившейся жидкости m найти легко — это произведение плотности жидкости ϱ на объем половины круглого цилиндра радиуса R и высоты l. Расстояние, на которое опустился центр тяжести жидкости, — $h=2d$, где d — расстояние от центра тяжести половины цилиндра до невозмущенной поверхности. Для круглого цилиндра это расстояние оказывается равным $\frac{4}{3\pi}R$.

Итак, изменение потенциальной энергии жидкости равно

$$\Delta W_2=-\varrho g\frac{\pi R^2 l}{2}\cdot\frac{4R}{3\pi}\cdot 2=-\frac{4}{3}\varrho g R^3 l.$$

Полное изменение энергии запишется в виде

$$\Delta W=\Delta W_1+\Delta W=$$
$$=2(\pi-2)\sigma Rl-\varrho gl\frac{4}{3}R^3=$$
$$=2Rl\left[(\pi-2)\sigma-\frac{2}{3}\varrho gR^2\right].$$

На рисунке 4 приведен график зависимости ΔW от R. Посмотрите на этот график повнимательнее. Именно он дает ответ на все непонятные вопросы, связанные с выливанием воды. Для начала сравните его с графиком на рисунке 5, где изображена зависимость потенциальной энергии от координаты для шарика, который находится на вершине горы в небольшой яме. Похоже, не правда ли?

И поведение этих столь не похожих друг на друга систем во многом оказывается аналогичным. Шарик, как и любая система, стремится

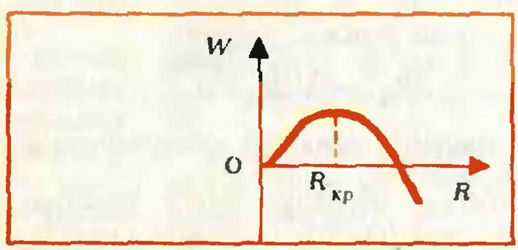


Рис. 4.

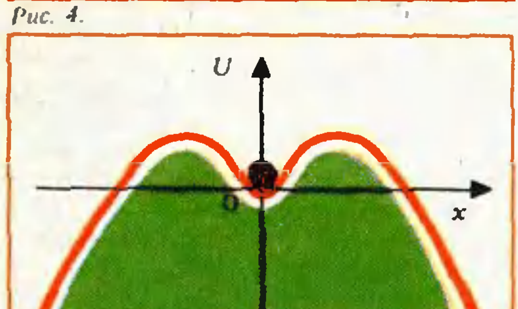


Рис. 5.

занять положение с минимальной потенциальной энергией. Поэтому при малых отклонениях от положения равновесия он вернется обратно, на дно ямы. Но если отклонение будет достаточно велико, то шарик начнет скатываться с горы и уже не вернется в первоначальное положение равновесия. Перевалив через наивысшую точку, он будет стремиться к другому минимуму потенциальной энергии.

Аналогичная картина происходит и при выливании жидкости. Невозмущенная нижняя граница соответствует нулевому значению R (точка 0 на рисунке 4). При возникновении волн с $R<R_{кр}$ поверхность жидкости будет стремиться вернуться в невозмущенное состояние. Но как только R превысит $R_{кр}$, амплитуда волн будет стремиться неограниченно возрастать. Уменьшение энергии за счет понижения центра тяжести окажется больше, чем увеличение энергии, связанное с увеличением площади поверхности. Поэтому волне энергетически выгодно увеличивать амплитуду. Это и приведет к выливанию жидкости из сосуда.

Вычислим теперь критическое значение $R_{кр}$. Из рисунка 4 видно, что максимум потенциальной энергии достигается только в одной точке. Те, кто уже умеет исследовать функции на максимум и минимум с помощью производных, легко найдут, что

$$R_{кр} = \sqrt{\frac{(\pi-2)}{2}\,\frac{\sigma}{\varrho g}}.$$

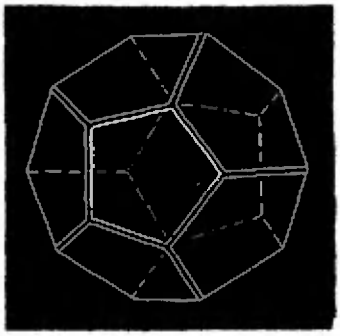
Остальным придется поверить нам на слово.

Таким образом, наша простая модель позволяет объяснить важнейшие черты исследуемого явления. Недостаток ее заключается в том, что параметр R характеризует у нас и длину волны, и ее амплитуду. Гораздо последовательнее было бы независимо задавать все параметры волны, но это усложнило бы подсчет изменения энергии. Для тех, кто не умеет интегрировать, трудности стали бы непреодолимыми, а мы стремились максимально упростить все вычисления. Тем не менее подстановка численных значений для воды — $\varrho = 10^3$ кг/м^3 и $\sigma = 73 \cdot 10^{-3}$ Дж/м^2 — дает значение критического радиуса $R_{кр} = 2 \cdot 10^{-3}$ м $=2$ мм. Учитывая, что длина волны равна $\lambda = 4R$, мы получим, что вода будет вытекать из перевернутого сосуда, если размер отверстия превышает 8 мм, что находится в разумном согласии с экспериментом.

* * *

Итак, мы выяснили роль различных факторов, которые влияют на выливание воды и прочих жидкостей из сосуда. Это простое, на первый взгляд, явление оказалось сложным и интересным.

И в заключение вернемся к самому началу. Как же все-таки ответить на вопрос: «почему вода выливается из ведра?» Правильный ответ можно сформулировать примерно так: радиус ведра гораздо больше критического радиуса, начиная с которого на нижней поверхности воды могут образовываться неустойчивые волны. Поэтому волнения, случайно возникающие на нижней поверхности воды, имеют тенденцию неограниченно увеличивать свою амплитуду, что и приводит к выливанию воды из перевернутого ведра.



Химическая геометрия

Химические соединения, особенно органические, имеют сложное строение. Наглядный тому пример — молекула дезоксирибонуклеиновой кислоты, представляющая собой две полимерные цепочки, закрученные в двойную спираль (см., например, статьи М. Д. Франк-Каменецкого «Самая главная молекула» в «Кванте» № 8 за 1982 год и «Левая спираль ДНК» в «Кванте» № 6 за 1983 год).

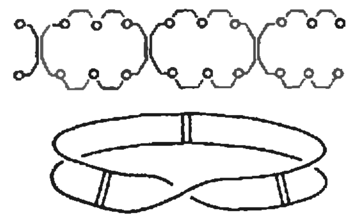
Выяснить строение сложных молекул, созданных природой, разобраться в их геометрии не так-то просто. Однако сейчас химики научились не только расшифровывать известные соединения, но и создавать новые, геометрия которых весьма необычна. О двух осуществленных геометрических «проектах» и пойдет речь. Сообщения о них появились в научных журналах в конце 1982 года.

Первое такое соединение получило название «додекаэдран». Его молекулы имеют форму додекаэдра — правильного двенадцатигранника (см. рисунок в начале статьи). Каждая молекула состоит из 40 атомов: 20 атомов углерода, расположенных в вершинах додекаэдра, и 20 атомов водорода, присоединенных к атомам углерода.

История о том, как «собрать» такой многогранник, как следить за правильностью «сборки» на каждом этапе, заслуживает отдельного рассказа. Заметим только, что молекул с такой симметрией до сих пор известно не было и в книгах о такой симметрии говорилось лишь для полноты картины. Теперь же это не так, додекаэдран — вполне реальное вещество, хотя и полученное пока в очень небольшом количестве. Это порошок белого цвета, который начинает плавиться при температуре 450 °С.

Молекулы второго необычного соединения, полученного химиками, имеют вид ленты Мёбиуса. Попробуем объяснить, как они устроены.

Среди органических соединений есть много таких, молекулы которых представляют собой кольца. Например, некоторые эфиры. Эфирные кольца часто объединяются по несколько штук, образуя цепочку-мономер, связанную перемычками двойных связей. В нашем примере (см. рисунок ниже) мономер состоит из трех колец. Эти короткие цепочки, благодаря тому, что на



их концах находятся активные группы, могут объединяться в лентообразные цепочки-полимеры. Однако, если в растворе мономеров мало, они, изгибаясь, могут соединяться просто сами с собой, образуя кольцо. При этом примерно в половине случаев образуется не простое кольцо, а перекрученное. Так устроен первый химический лист Мёбиуса.

К нашей геометрической коллекции следует добавить еще катенаны — недавно полученные кольцеобразные молекулы, в которых кольца сцеплены не химически, а соединены, как в ювелирной цепочке.

Можно надеяться, что с течением времени коллекция будет пополняться все новыми и новыми экспонатами.

Я. С.

Сравнительный вискозиметр Жуковского

Кандидат физико-математических наук А. Э. АРИНШТЕЙН

Всем хорошо известно, что, согласно законам Ньютона, для поддержания движения тел с постоянной скоростью не требуется никаких сил. Однако на практике мы убеждаемся как раз в обратном: если к движущемуся телу не прикладывать сил, поддерживающих это движение, то тело рано или поздно остановится.

Кажущееся противоречие объяснить очень легко. И дело, конечно же, не в нарушении законов Ньютона. Просто в реальных ситуациях практически на любое движущееся тело действуют силы сопротивления, направленные против движения. Природа этих сил может быть различной, но результат их действия один и тот же: для поддержания движения необходима дополнительная сила, в противном случае тело остановится.

Одно из свойств материальных тел, которое приводит к возникновению сил сопротивления движению, — это вязкость. Рассмотрим такой пример. Если жидкость течет по горизонтальной трубе постоянного сечения, то по закону Бернулли давление жидкости должно быть одинаковым по всей длине трубы. В действительности давление вдоль направления движения жидкости падает, и для сохранения устойчивого течения на концах трубы надо поддерживать определенную разность давлений. Это связано с тем, что скорости движения жидкости на различных расстояниях от стенок трубы неодинаковы, и между отдельными слоями движущейся жидкости возникают силы, называемые силами вязкости. Они стремятся затормозить тот из двух соприкасающихся слоев, который движется быстрее, и ускорить тот, который движется медленнее.

У разных жидкостей этот эффект проявляется по-разному. У густых жидкостей, подобных меду, он выражен сильнее, чем у жидкостей типа воды. Первые жидкости называют, соответственно, более вязкими, а вторые — менее вязкими. (Для тел, находящихся в аморфном состоянии, вязкое течение, хотя и очень слабое, тоже имеет место. Известно, например, что поставленная вертикально стеклянная пластинка через несколько десятков, а иногда сотен, лет принимает форму сильно вытянутой капли. Аналогично происхождение сталактитов — натеков причудливой формы, свешивающихся с потолка и стен пещер.)

Существует и количественная оценка вязких свойств — вязкость, величина, которая может быть измерена (а это очень важно для физиков). Что же под этим понимается?

Мысленно поместим жидкость (договоримся впредь этим словом называть и жидкость, и газ) между двумя параллельными достаточно большими пластинами, расположенными на небольшом расстоянии друг от друга (рис. 1). Пусть первоначально вся система покоится, а в некоторый момент верхняя пластина начинает двигаться параллельно нижней с постоянной скоростью v_0. Благодаря вязкости, жидкость тоже придет в движение, причем прилегающий к верхней пластине слой будет двигаться с той же скоростью, что и пластина, следующий слой — с меньшей скоростью, следующий — с еще меньшей и так далее до самого нижнего слоя, который как бы прилипает к нижней пластине и остается в покое. Оказывается, для того чтобы поддерживать движение верхней пластины с постоянной скоростью, к ней требуется прикладывать постоянную силу. Как экспериментально было установлено еще Ньютоном, модуль F этой силы тем больше, чем больше площадь S пластины и скорость v_0 ее движения и чем меньше расстояние d между пластинами (другими словами, сила, приходящаяся на единицу площади поверхности пластины, зависит от того, насколько быстро меняется скорость течения жидкости при переходе от слоя к слою):

$$F \sim S\frac{v_0}{d}, \text{ или } F = \eta S\frac{v_0}{d}.$$

Коэффициент пропорциональности η и есть вязкость жидкости. В единицах СИ она измеряется в кг/(м · с).

Для разных жидкостей ее значения различны, а для каждой данной жидкости вязкость довольно сильно зависит от температуры. Так, в жизни мы часто замечаем, как с понижением температуры загустевают, то есть становятся более вязкими, многие жидкости. Поэтому, задавая вязкость вещества, всегда оговаривают температуру, а в случае необходимости задают различные значения вязкости в зависимости от температуры или даже график зависимости вязкости от температуры (например, на рисунках 2 и 3 изображены такие графики для воды и оливкового масла).

Вязкость можно измерить, для этого существуют специальные приборы, называемые вискозиметрами. Имеется несколько различных типов вискозиметров, об одном из них мы и хотим рассказать.

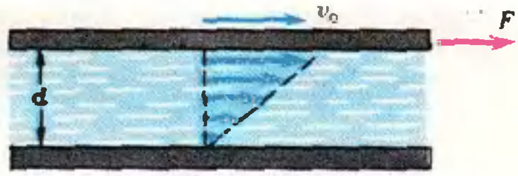


Рис. 1.

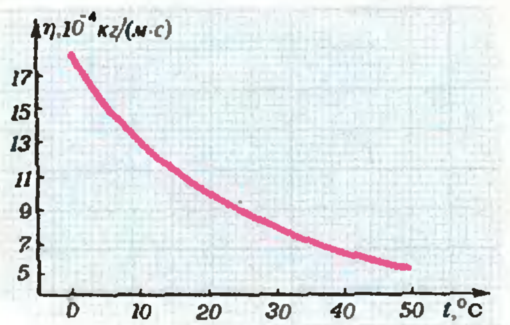


Рис. 2.

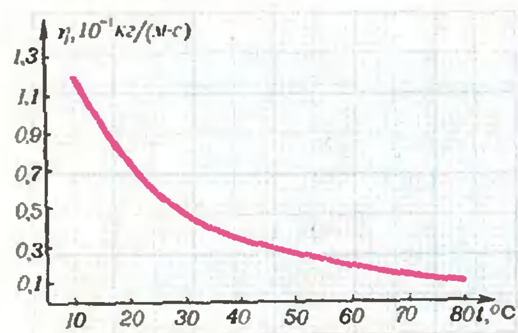


Рис. 3.

Непосредственное измерение вязкости — процедура довольно тонкая. Но если у вас есть жидкость, вязкость которой известна, то можно буквально из подручных материалов сделать прибор, с помощью которого легко сравнить вязкости двух жидкостей, а значит, и определить вязкость интересующей вас жидкости. Речь идет о сравнительном вискозиметре Жуковского, названном по имени замечательного русского ученого Н. Е. Жуковского, придумавшего и описавшего этот прибор.

Сравнительный вискозиметр (рис. 4) состоит из большого сосуда K, заполненного водой, температура которой поддерживается постоянной и контролируется термометром T. В воде находятся два грушевидных сосуда (например, молочные бутыл-

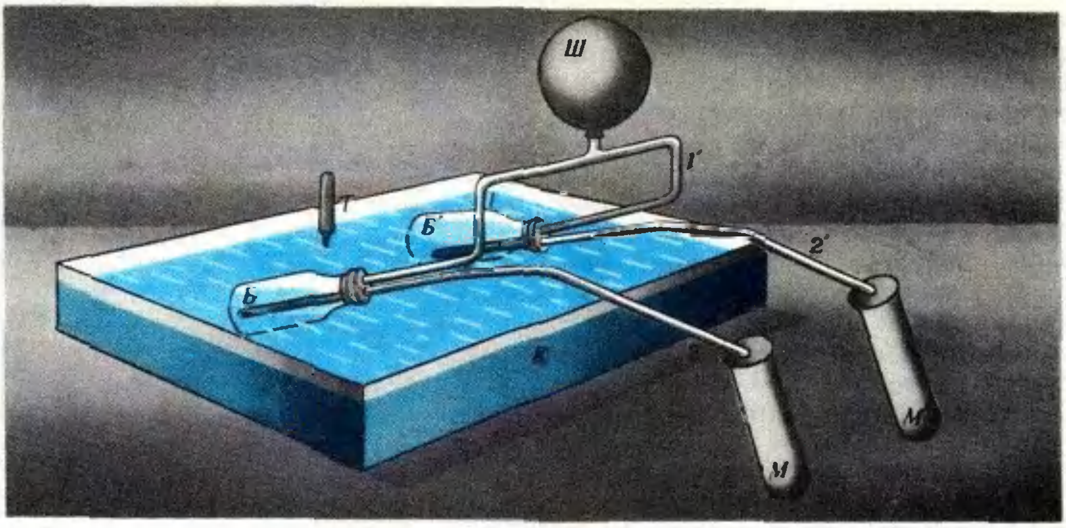


Рис. 4.

ки) *Б* и *Б′*, закрытые гуттаперчевыми пробками. В каждую пробку входит по две трубки: одна изогнутая, другая прямая. Изогнутые трубки *1* и *1′*, оканчивающиеся в горловинах сосудов, посредством тройника соединены с резиновым шаром *Ш* (годится, например, футбольная камера или медицинская спринцовка). Прямые трубки *2* и *2′* одним концом доходят до дна соответствующего сосуда, а другим входят в мензурки *М* и *М′* (проградуированные в кубических сантиметрах). Выступающие участки этих трубок можно плавно изогнуть так, чтобы их концы были почти вровень (чуть выше) с уровнем жидкостей в сосудах *Б* и *Б′*. Это делается для того, чтобы уменьшить погрешность измерения за счет разной плотности жидкостей (не надо преодолевать различную силу давления столбиков самих жидкостей).

Наполним сосуд *Б* жидкостью с известной вязкостью, а сосуд *Б′* — исследуемой жидкостью, опустим их в сосуд *К* и зальем туда воду определенной температуры. Через некоторое время, когда этой же температуры достигнет все содержимое сосуда *К*, начинаем сжимать шарик *Ш* и гнать из него воздух в сосуды *Б* и *Б′*. Он попадает в верхние части этих сосудов и давит на жидкости с равными силами давления. Под давлением воздуха жидкости частично вытесняются из сосудов и через прямые трубки попадают в мензурки.

Как показывает опыт, объем V жидкости, протекающий через трубку постоянного сечения за некоторое время τ, тем больше, чем меньше вязкость жидкости, то есть

$$\frac{V}{\tau}=\frac{A}{\eta},$$

где коэффициент A зависит от условий опыта, к которым относятся перепад давлений и параметры трубок (подробнее об этом будет рассказано в Приложении к статье). Если трубки *2* и *2′* одинаковы, то отношение объемов вытесненных жидкостей будет равно обратному отношению их вязкостей:

$$\frac{V}{V'}=\frac{\eta'}{\eta}$$

(ведь все условия протекания обеих жидкостей одинаковы). Отсюда, зная вязкость η известной жидкости и измерив на опыте объемы V и V', легко найти вязкость исследуемой жидкости:

$$\eta'=\eta\frac{V}{V'}.$$

А как быть, если нельзя гарантировать идентичность трубок *2* и *2′* (в домашних условиях это сделать, действительно, практически невозможно)? Это затруднение можно преодолеть, несколько изменив методику проведения эксперимента.

Проведем опыт два раза: сначала так, как было описано выше, а затем — поменяв местами трубки 2 и 2'. Из первого опыта получим

$$\frac{V_1}{\tau_1} = \frac{A}{\eta}, \ \frac{V_1'}{\tau_1} = \frac{A'}{\eta'},$$

или

$$\frac{V_1}{V_1'} = \frac{A}{A'}\,\frac{\eta'}{\eta},$$

из второго —

$$\frac{V_2}{\tau_2} = \frac{A'}{\eta}, \ \frac{V_2'}{\tau_2} = \frac{A}{\eta},$$

или

$$\frac{V_2}{V_2'} = \frac{A'}{A}\,\frac{\eta'}{\eta}.$$

Откуда, почленно перемножив два полученных равенства, найдем

$$\left(\frac{\eta'}{\eta}\right)^2 = \frac{V_1V_2}{V_1'V_2'},$$

или

$$\eta' = \eta\sqrt{\frac{V_1V_2}{V_1'V_2'}}.$$

Меняя температуру воды в сосуде *K*, можно измерить вязкость исследуемой жидкости при разных температурах и построить соответствующую кривую зависимости вязкости от температуры.

В заключение — один практический совет. Лучше сравнивать жидкости с близкими значениями вязкости, тогда объемы вытесненных жидкостей будут примерно одинаковыми (в противном случае один объем окажется малым по сравнению с другим, что увеличит погрешность измерений). Для исследования жидкостей с малой вязкостью за эталон удобно взять воду, а для более вязких жидкостей — оливковое масло (напомним, что соответствующие кривые $\eta = \eta(t)$ приведены на рисунках 2 и 3).

Приложение

Объем жидкости, протекающий через трубу постоянного сечения в единицу времени, определяется формулой

$$\frac{V}{\tau} = \frac{\Delta p S^2}{8\pi l \eta},$$

где Δp — разность давлений на концах трубы, S — площадь сечения трубы, l — ее длина, η — вязкость жидкости. Приведенная формула называется формулой Пуазейля, в честь французского ученого, который впервые экспериментально исследовал явление протекания жидкости по узким трубкам — капиллярам. С именем Пуазейля связана также одна из единиц измерения вязкости жидкости — пуаз (1 пуаз = 1 г/(см · с) = = 0,1 кг/(м · с)).

Формулу Пуазейля, с точностью до безразмерного коэффициента, можно вывести, исходя из соображений размерностей. Поскольку для равномерного течения вязкой жидкости необходим перепад давлений на концах трубы, ясно, что объем вытекающей жидкости за единицу времени будет тем больше, чем больше перепад давлений, приходящийся на единицу длины трубы. Кроме того, количество вытекшей жидкости тем больше, чем больше площадь поперечного сечения трубы и чем меньше вязкость жидкости. Таким образом, получаем

$$\frac{V}{\tau} = k\left(\frac{\Delta p}{l}\right)^{\alpha}\frac{S^{\beta}}{\eta^{\gamma}},$$

где k — некий безразмерный коэффициент. Вид этой формулы выбран из соображений, что $V/\tau = 0$ либо при $\Delta p/l = 0$, либо при $S = 0$, либо при $\eta \to \infty$. Теперь подставим соответствующие размерности физических величин:

$$\frac{\text{м}^3}{\text{с}} = \left(\frac{\text{кг}/(\text{м}\cdot\text{с}^2)}{\text{м}}\right)^{\alpha}\frac{(\text{м}^2)^{\beta}}{(\text{кг}/(\text{м}\cdot\text{с}))^{\gamma}},$$

или

$$\text{м}^3 = \text{м}^{-2\alpha+2\beta+\gamma},$$
$$\text{с}^{-1} = \text{с}^{-2\alpha+\gamma},$$
$$0 = \text{кг}^{\alpha-\gamma}.$$

Отсюда следует, что

$$\alpha = \gamma = 1 \quad \text{и} \quad \beta = 2,$$

то есть

$$\frac{V}{\tau} = k\frac{\Delta p}{l}\,\frac{S^2}{\eta}.$$

В коллекции филателистов

Коллекция почтовых марок с портретами выдающихся советских физиков, механиков, математиков и астрономов пополнилась еще одной новой маркой. Она посвящена выдающемуся советскому механику академику Борису Николаевичу Петрову. Он был академиком-секретарем отделения механики и процессов управления АН СССР, председателем Совета по международному сотрудничеству в области исследования и использования космического пространства («Интеркосмос»).

В. Р.

Квадратный трехчлен

Кандидат физико-математических наук
А. А. БОЛИБРУХ,
кандидат физико-математических наук
В. М. УРОЕВ,
профессор М. И. ШАБУНИН

Квадратным трехчленом относительно x называется выражение вида

$$ax^2+bx+c,$$

где a, b, c — заданные числа, причем $a\neq 0$. Значения x, при которых квадратный трехчлен обращается в нуль, называются *корнями* трехчлена.

Задачи, при решении которых требуется знание свойств квадратного трехчлена, нередко встречаются на вступительных экзаменах в вузы. Многие школьники без затруднений выписывают различные формулы, умеют изобразить график квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$, знают ее основные свойства. Однако эти знания часто бывают формальными, абитуриентам не удается их применить при решении задач, относящихся к рассматриваемой теме.

Мы покажем на примерах, как важно бывает умение сочетать алгебраические и геометрические соображения при решении таких задач.

1. *Найдите наибольшее значение квадратного трехчлена* $y=-2x^2+4x-5$.

Для решения этой задачи можно, конечно, пользоваться производной, но можно обойтись и без нее. Применим метод выделения полного квадрата:

$$y=-2x^2+4x-5=$$
$$=-2(x^2-2x+1)+2-5=$$
$$=-2(x-1)^2-3.$$

Отсюда видно, что наибольшее значение квадратного трехчлена равно -3 и достигается при $x=1$.

Заметим, что метод выделения полного квадрата применяется для получения формулы корней квадратного уравнения, а также для построения графика квадратичной функции $y=ax^2+bc+c$. Выделяя полный квадрат, получаем

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{2a},$$

откуда следует, что график функции $y=ax^2+bx+c$ получается параллельным переносом параболы $y=ax^2$ на вектор $\left(-\frac{b}{2a},\ \frac{4ac-b^2}{2a}\right)$.

2. *Определите знаки чисел a, b, c исходя из расположения параболы $y=ax^2+bx+c$ относительно координатных осей в каждом из случаев, показанных на рисунке 1.*

Рассмотрим подробно случай *а*). Коэффициент a меньше 0, так как ветви параболы направлены вниз. Абсцисса вершины параболы, равная $-\frac{b}{2a}$, меньше нуля, откуда следует, что $b<0$. Ордината точки пересечения оси Oy с параболой равна значению функции $f(x)=ax^2+bx+c$ при $x=0$. Следовательно, коэффициент $c=f(0)$ положителен. Итак, $a<0$, $b<0$, $c>0$.

Этот же результат можно получить иначе, если воспользоваться формулами Виета: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$. Однако такой способ исследования уже нельзя применить в случае *б*), когда корней нет.

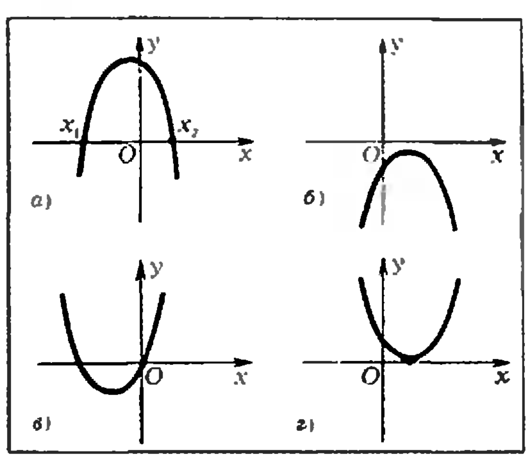


Рис. 1.

Предлагаем читателям самостоятельно разобрать случаи *б*, *в*, *г*.

3. *Корни x_1 и x_2 квадратного уравнения $x^2-2rx-7r^2=0$ удовлетворяют условию $x_1^2+x_2^2=18$. Найдите r.*

Сначала выразим $x_1^2+x_2^2$ через сумму и произведение корней, а затем воспользуемся теоремой Виета. Имеем

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=$$
$$=(2r)^2-2\cdot(-7r^2)=18r^2.$$

Таким образом, задача сводится к решению уравнения $r^2=1$, откуда $r_1=1$, $r_2=-1$.

4. *Найдите необходимые и достаточные условия того, что корни x_1 и x_2 уравнения $f(x)=x^2+px+q=0$ больше 1 по абсолютной величине и различны по знаку.*

Решение, основанное на применении известных формул для дискриминанта и корней квадратного уравнения, является трудоемким и технически сложным. Задача легко решается, если использовать геометрические соображения.

Найдем сначала необходимые условия. Пусть $x_1<x_2$ (корни различны). По условию задачи $x_1<-1$, $x_2>1$, то есть отрезок $[-1, 1]$ лежит внутри промежутка $]x_1, x_2[$ (рис. 2). Последнее условие эквивалентно следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} f(-1)<0, \\ f(1)<0. \end{cases} \qquad (1)$$

Подставляя 1 и -1 в выражение для $f(x)$ получаем необходимые условия:

$$\begin{cases} -p+q<-1, \\ p+q<-1. \end{cases} \qquad (2)$$

Связь между найденными значениями p и q удобно представить графически, изобразив на координатной плоскости (p, q) множество точек, координаты которых удовлетворяют полученным неравенствам (рис. 3).

Покажем, что необходимые условия (2) являются достаточными, то есть при выполнении неравенств (2) квадратный трехчлен $f(x)=x^2+px+q$ имеет такие корни x_1 и x_2, что $x_1<-1$, а $x_2>1$. Так как условия (2) эквивалентны условиям (1), в двух различных точках ($x=1$ и $x=-1$) функция $y=f(x)$ принимает отрицательные значения. Так как коэффициент при x^2 положителен, ветви параболы $y=f(x)$ направлены

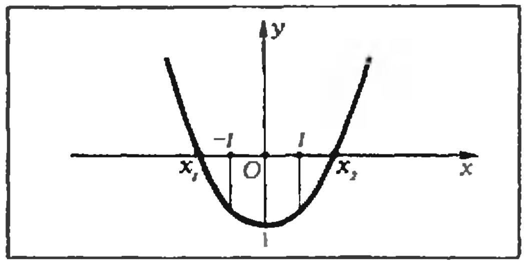


Рис. 2.

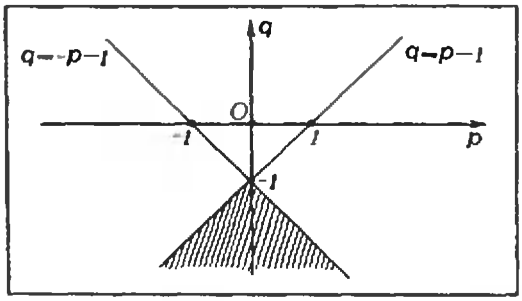


Рис. 3.

вверх. Следовательно, парабола пересекает ось Ox в двух различных точках x_1 и x_2 $(x_1<x_2)$, причем точки -1 и 1 лежат на интервале $]x_1, x_2[$, то есть $x_1<-1$, $x_2>1$.

5. *Найдите все значения r, при которых корни уравнения $(r-4)x^2-2(r-3)x+r=0$ больше -1.*

Сначала отдельно рассмотрим случай $r=4$. Тогда уравнение имеет вид $-2x+4=0$, откуда $x=2$. Так как $2>-1$, значение $r=4$ нам подходит.

Если $r\neq 4$, то уравнение является квадратным.

Решим задачу в более общем виде: *найдем необходимые и достаточные условия, при которых корни квадратного трехчлена $f(x)=ax^2+bx+c$ существуют и оба больше заданного числа d.*

Геометрическое решение. Корни x_1 и x_2 должны существовать, поэтому (1) $D=b^2-4ac\geqslant 0$.

Построим эскиз графика функции $y=f(x)$. Возможна одна из двух ситуаций, представленных на рисунке 4. Так как оба корня больше d, абсцисса вершины параболы больше d, то есть $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}>d$, или по формулам Виета

$$-\frac{b}{2a}>d \qquad (2)$$

Точка $x=d$ должна лежать вне отрезка $[x_1, x_2]$. Это означает, что либо ветви параболы направлены

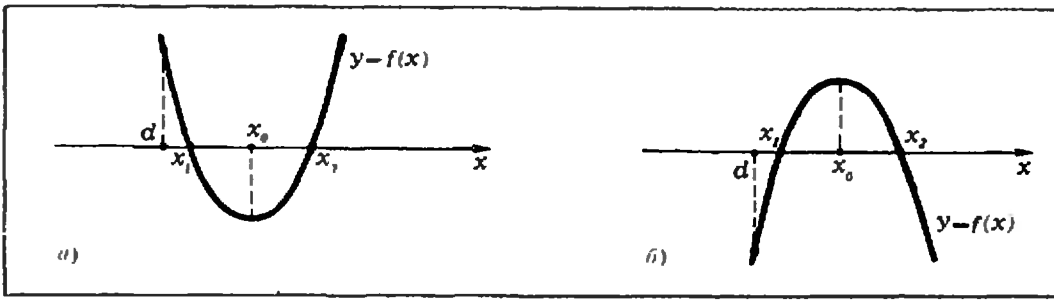


Рис. 4.

вверх ($a>0$) и $f(d)>0$ (рис. 4, *а*), либо ветви параболы направлены вниз ($a<0$) и $f(d)<0$ (рис. 4, *б*). Следовательно, числа a и $f(d)$ — одного знака, то есть

$$af(d)>0. \qquad (3)$$

Проверьте самостоятельно, что условия (1) — (3) в совокупности являются не только необходимыми, но и достаточными.

Алгебраическое решение. Два действительных числа x_1-d и x_2-d положительные тогда и только тогда, когда их сумма и произведение положительны. Поэтому условие задачи равносильно совокупности следующих трех условий:

$$D=b^2-4ac>0,$$
$$(x_1-d)+(x_2-d)>0,$$
$$(x_1-d)(x_2-d)>0.$$

Пользуясь формулами Виета, второе условие можно переписать в виде

$$x_1+x_2-2d>0,\ \frac{x_1+x_2}{2}>d,\ -\frac{b}{2a}>d.$$

Третье — переписывается так:

$$x_1x_2-(x_1+x_2)d+d^2>0,$$
$$a(ad^2+bd+c)>0,\ af(d)>0.$$

Таким образом, мы вновь доказали, что совокупность условий (1) — (3) равносильна условиям рассмотренной общей задачи.

Возвращаясь к задаче 5, выпишем для нее условия (1) — (3). Получим систему неравенств

$$\left\{\begin{array}{l}(r-3)^2-r(r-4)=9-2r\geqslant 0,\\ \frac{r-3}{r-4}>-1,\\ (r-4)(4r-10)>0.\end{array}\right.$$

Решая ее, получаем $r<5/2$, $4<r\leqslant 9/2$. К этим решениям надо добавить решение $r=4$. Ответ:

$$\left]-\infty, \frac{5}{2}\right[\cup \left[4, \frac{9}{2}\right].$$

Задачи

6. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+px+q=0$. Найдите p и q, если известно, что x_1+1 и x_2+1 являются корнями уравнения $x^2-p^2x+pq=0$.

7. График квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ высекает на двух параллельных прямых отрезки $[AB]$ и $[CD]$. Докажите, что прямая, проходящая через середины этих отрезков, параллельна оси ординат.

8. Известно, что квадратный трехчлен $f(x)=ax^2+bx+c$ не имеет корней и его коэффициенты связаны соотношением $a-b+c<0$. Определите знак c.

9. Пусть корни x_1 и x_2 квадратного трехчлена ax^2+bx+c различны. Докажите, что число x_0 находится между x_1 и x_2 тогда и только тогда, когда $a(ax_0^2+bx_0+c)<0$.

10. Пусть уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет неотрицательных корней и $a<0$. Определите знак c.

11. Пусть коэффициенты уравнений $x^2+p_1x+q_1=0$ и $x^2+p_2x+q_2=0$ связаны соотношением $p_1p_2=2(q_1+q_2)$. Докажите, что по крайней мере одно из этих уравнений имеет корни.

12. Может ли уравнение $x^2+px+q=0$, где p и q — рациональные числа, иметь следующие корни:

а) $x_1=\sqrt{3}$, $x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$?

б) $x_1=\sqrt{3}+2$, $x_2=2-\sqrt{3}$?

13. Докажите, что любой рациональный корень уравнения $x^2+px+q=0$ с целыми коэффициентами p и q является целым числом.

14. Уравнения $x^2+p_1x+q_1=0$ и $x^2+p_2x+q_2=0$ с целыми коэффициентами p_i, q_i ($i=1, 2$) имеют общий нецелый корень. Докажите, что $p_1=p_2$, $q_1=q_2$.

15. Пусть x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ и $S_m=x_1^m+x_2^m$ (m — целое положительное). Докажите формулу $aS_m+bS_{m-1}+cS_{m-2}=0$.

Физика 8, 9, 10

С этого номера раздел «Школа в «Кванте» начинает публиковать небольшие заметки по физике для учащихся 8—10 классов. В них будут разъясняться некоторые вопросы школьной программы. Читатель узнает также, как можно по-другому вывести известные школьные формулы. Некоторые статьи будут посвящены вопросам, которые не уместились в школьном учебнике. Редакция надеется, что эти материалы послужат дополнением к учебнику и помогут читателям лучше усвоить школьную программу.

Публикуемая ниже заметка «О выборе координатной оси» предназначена восьмиклассникам, заметка «Простой способ определения размеров молекул» — девятиклассникам, а заметка «О законе колебательного движения» — десятиклассникам.

Материалы подготовил И. К. Белкин.

О выборе координатной оси

При рассмотрении прямолинейного движения точки координатную ось X обычно направляют вдоль направления движения, то есть вдоль направления вектора перемещения (рис. 1).

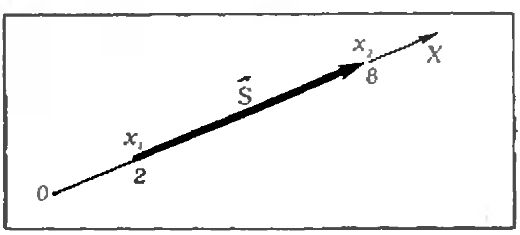


Рис. 1.

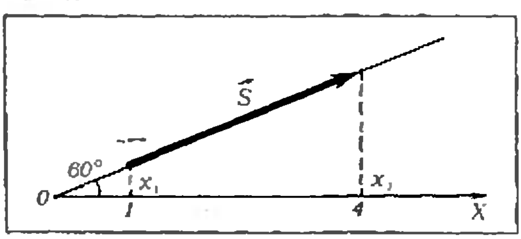


Рис. 2.

Тогда проекция S_x вектора $\vec{S}$ на ось просто равна модулю S этого вектора:

$$S_x = x_2 - x_1 = S.$$

В случае, показанном на рисунке 1,

$$S = 8\ \text{м} - 2\ \text{м} = 6\ \text{м}.$$

Но не нужно думать, что такой выбор оси обязателен. Ось X можно направить произвольным образом, под любым углом к направлению вектора $\vec{S}$. Например, так, как это показано на рисунке 2, где ось X образует с вектором $\vec{S}$ угол $\alpha = 60°$. От этого результат (модуль вектора перемещения) не может измениться. Из рисунка 2 видно, что

$$S_x = x_2 - x_1,$$

а

$$\frac{x_2 - x_1}{S} = \cos\alpha, \quad \text{или} \quad x_2 - x_1 = S\cos\alpha,$$

откуда

$$S = \frac{x_2 - x_1}{\cos\alpha}.$$

В нашем случае

$$S = \frac{4\ \text{м} - 1\ \text{м}}{0{,}5} = 6\ \text{м}.$$

Таким образом, результат не зависит от того, как направлена координатная ось. Выбор направления оси диктуется только соображением удобства.

Простой способ определения размеров молекул

В молекулярной физике главные «действующие лица» — это молекулы, невообразимо маленькие частицы, из которых состоят все на свете вещества. Ясно, что для изучения многих явлений важно знать, каковы они, молекулы. В частности — каковы их размеры.

Когда говорят о молекулах, их обычно считают маленькими упругими твердыми шариками. Следовательно, знать размер молекул — значит знать их радиус.

Несмотря на малость молекулярных размеров, физики сумели разработать множество способов их определения. В «Физике 9» рассказывается о двух из них. В одном используется свойство некоторых (очень немногих) жидкостей растекаться в виде пленки толщиной в одну молекулу. В другом размер частицы определяется с помощью сложного прибора — ионного проектора.

Существует, однако, очень простой, хотя и не самый точный, способ вычисления радиусов молекул (или атомов). Он основан на том, что молекулы вещества, когда оно находится в твердом или жидком состоянии, можно считать плотно прилегающими друг к другу. В таком случае для грубой оценки можно считать, что объем V некоторой массы m вещества просто равен сумме объемов содержащихся в нем молекул. Тогда объем одной молекулы мы получим, разделив объем V на число молекул N.

Число молекул в теле массой m равно, как известно, $N_A m/M$, где M — молярная масса вещества и N_A — число Авогадро. Отсюда объем V_0 одной молекулы определяется из равенства

$$V_0 = \frac{V}{N} = \frac{VM}{mN_A}.$$

В это выражение входит отношение объема вещества к его массе. Обратное же отношение $m/V = \varrho$ есть плотность вещества, так что

$$V_0 = \frac{M}{\varrho N_A}.$$

Плотность практически любого вещества можно найти в доступных всем таблицах. Молярную массу легко определить, если известна химическая формула вещества.

Объем одной молекулы, если считать ее шариком, равен $\frac{4}{3}\pi r^3$, где r — радиус шарика. Поэтому

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{M}{\varrho N_A},$$

откуда мы и получаем выражение для радиуса молекулы:

$$r = \sqrt[3]{\frac{3M}{4\pi\varrho N_A}} = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi N_A}}\sqrt[3]{\frac{M}{\varrho}}.$$

Первый из этих двух корней — постоянная величина, равная $\approx 7{,}4 \cdot 10^{-9}$ моль$^{1/3}$, поэтому формула для r принимает вид

$$r \approx 7{,}4 \cdot 10^{-9}\sqrt[3]{\frac{M}{\varrho}}\ (\text{м}).$$

Например, радиус молекулы воды, вычисленный по этой формуле, равен $r_в \approx 1{,}9 \cdot 10^{-10}$ м.

Описанный способ определения радиусов молекул не может быть точным уже потому, что шарики нельзя уложить так, чтобы между ними не было промежутков, даже если они соприкасаются друг с другом. Кроме того, при такой «упаковке» молекул-шариков были бы невозможны молекулярные движения. Тем не менее вычисления размеров молекул по формуле, приведенной выше, дают результаты, почти совпадающие с результатами других методов, несравненно более точных.

О законе колебательного движения

Колебательное движение способно совершать всякое тело (точка), если на него действует упругая сила, например сила упругости пружины (или сила, «похожая» на упругую).

Для вывода закона движения, то есть зависимости координаты от

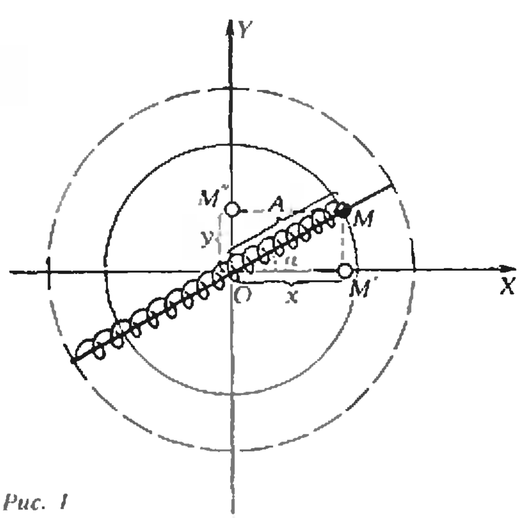


Рис. 1

времени, приходится пользоваться дифференциальным исчислением, решать дифференциальное уравнение (см. «Физику 10»). Можно получить этот закон и более простым образом. Покажем это.

Пусть некоторая материальная точка M движется по окружности радиуса A под действием пружины (рис. 1). Пружина надета на стержень, который может вращаться вокруг точки O. Один конец пружины связан с точкой M, а другой закреплен на краю стержня. Если стержень привести во вращение с угловой частотой ω, то пружина растянется на длину A и возникнет сила упругости, которая будет действовать на точку M. Эта сила сообщит точке центростремительное ускорение, равное $\omega^2 A$, где A — радиус окружности, по которой будет двигаться точка. Модуль силы упругости равен, как известно, kA, где k — жесткость пружины. Значит, согласно второму закону Ньютона,

$$m\omega^2 A = kA,$$

откуда

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \text{ и } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \qquad (*)$$

Время, в течение которого точка совершает один оборот, называется периодом обращения точки и обозначается буквой T. Мы легко получим значение T, если разделим длину окружности $2\pi A$ на скорость v, которая может быть выражена через ω: $v = \omega A$, так что

$$T = \frac{2\pi A}{\omega A} = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Отсюда период обращения точки M, согласно равенству (*), равен

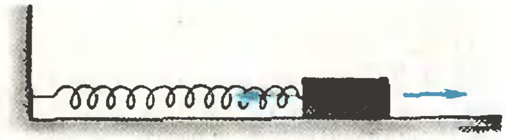


Рис. 2.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Однако движение точки по окружности, хотя оно и периодическое, не есть колебательное движение. Наиболее наглядный пример колебательного движения — это движение тела, прикрепленного к пружине, которая при колебаниях растягивается или сжимается (рис. 2). В нашем примере с вращающейся точкой (см. рис. 1) такое движение совершает не точка M, а ее проекция M' на ось X (или проекция M'' на ось Y). Положение точки M' на оси X, как видно из рисунка 1, задается ее координатой x, которая определяется равенством

$$x = A\cos\alpha,$$

где α — угол, образованный осью X и радиусом A, проведенным из центра O (начало координат) к точке M. Так как α при движении изменяется по формуле $\alpha = \omega t$, то

$$x = A\cos\omega t.$$

Это и есть закон колебательного движения. Легко видеть, что колебательное движение совершает и проекция M'' на ось Y. Закон движения этой точки имеет вид

$$y = A\sin\omega t.$$

Что касается периода T и частоты ω колебаний проекций M' и M'', то из рисунка 1 ясно, что они равны периоду и частоте обращения точки M по окружности.

Бим и Бом

На арене цирка выступал феноменальный вычислитель Бим, который мог перемножать в уме многозначные числа. Только что на глазах у изумленной публики он возвел два в двадцать девятую степень. Получилось девятизначное число, в котором все цифры были различны. У Бима было десять карточек, на которых были написаны все десять цифр. Из девяти карточек Бим выложил на арене нужное число, а десятую положил в карман. Придя после выступления домой, Бим рассказал своему брату математику Бому все, что написано выше, и хотел уже достать из кармана карточку, но Бом остановил его:

— Хоть я и не умею так хорошо считать в уме, как ты, но могу сказать, что у тебя в кармане четверка.

Как Бом это узнал, не вычисляя девятизначного числа?

Г. А. Гать

Квант для младших школьников

Задачи

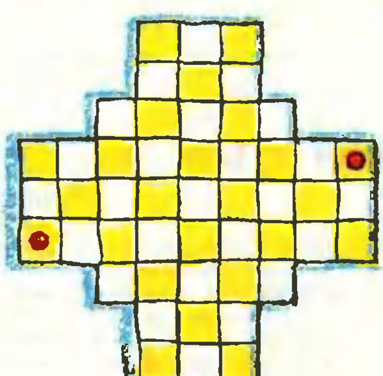
1. Гена вырезал из бумаги десять карточек и на каждой из них написал по цифре: 0, 1, 2, ..., 9. Затем он разложил их на столе по две и обнаружил, что получившиеся двузначные числа относятся как 1:2:3:4:5. Вечером он захотел показать свой результат отцу, но не нашел карточку с цифрой 0. Однако, подумав, он разложил карточки так, что новые числа также относились, как 1:2:3::4:5. Как раскладывал Гена карточки в первый раз и как — во второй?

2. На ежегодном «конкурсе тыкв», проводимом в Великобритании, очередной «чемпион» имел массу 109 килограмм и 2,5 метра в обхвате. Будет ли она плавать в воде? Сможет ли на ней, как на плоту, плавать мальчик, если его масса 20 килограмм? При расчетах считайте тыкву шаром, объем шара радиуса R равен $\frac{4\pi R^3}{3}$.

3. В обычном наборе домино 28 косточек. Сколько косточек содержало бы домино, у которого значения, указанные на косточках, изменялись бы не от 0 до 6, а от 0 до 12?

4. В треугольнике ABC проведена биссектриса AE. Сравните по величине углы AEB и AEC, если известно, что $|AB|>|AC|$.

5. Коля сделал доску (для игры, называемой «Йога») и раскрасил ее на манер шахматной, как показано на рисунке. Как-то раз он решил обойти все поля этой доски одной шашкой, побывав на каждом поле по одному разу и переходя с поля на поле через сторону соответствующего квадратика. Он заметил, что если он начинает с белого поля, то такой обход ему удается, а если с рыжего поля — то не удается. Почему?



Эти задачи нам предложили
А. Л. Кабризон, Н. А. Родина, А. П. Савин, Л. З. Карелин, Н. И. Авилов.

Кубик в картинках

Кандидат физико-математических наук
В. Н. ДУБРОВСКИЙ

Наверное, кубик Рубика уже не нуждается в представлении — только «Квант» посвятил ему четыре большие статьи *), и даже по телевидению его показывали! А самое главное — наконец, он стал появляться в продаже. Теперь повсюду можно встретить людей (обычно весьма юных), пытающихся *собрать* кубик — упорно, но не всегда успешно. Вот мы и решили еще раз рассказать, а точнее — показать на картинках, как это делается.

Повороты граней мы будем изображать с помощью стрелок в квадрате 3×3, изображающем **переднюю** грань кубика (рис. 0).

Каждый этап сборки задается рисунками, на которых показаны исходное положение *кубичков*, которые переставляются на этом этапе, последовательность поворотов этого этапа и вид кубика после его завершения.

Договоримся, что при сборке грань с **синим** центральным квадратом всегда будет у нас **верхней**. Центральный квадрат противоположной грани в разных экземплярах кубика бывает разным; для определенности будем считать его **зеленым**. Итак, в результате сборки верхняя грань кубика должна стать у нас синей, нижняя — зеленой. Передней гранью по ходу сборки может служить любая из четырех остальных (боковых) граней.

Если вы хоть немного крутили кубик, вы поняли, что центральные кубички всех граней сразу можно считать стоящими на своем месте (поскольку их взаимное расположение жестко установлено конструкцией кубика), а для каждого из остальных кубичков имеется вполне определенное **окончательное** положение: каждая грань кубичка должна примыкать (по стороне или вершине) к центральному квадрату того же цвета.

Кубик мы будем собирать послойно — сначала нижний слой (первые два шага), потом средний (третий шаг) и, наконец, верхний (последние четыре шага).

*) В. Залгаллер, С. Залгаллер «Венгерский шарнирный кубик» (1980, № 12), М. Евграфов «Механика волшебного кубика» (1982, № 3), В. Дубровский «Алгоритм волшебного кубика» (1982, № 7) и «Математика волшебного кубика» (1982, № 8). См. также заметку «Игра, задача или спорт?» (1982, № 7, с. 25) и статью Ю. Демкова «Поворачиваем кубики» (1981, № 12).

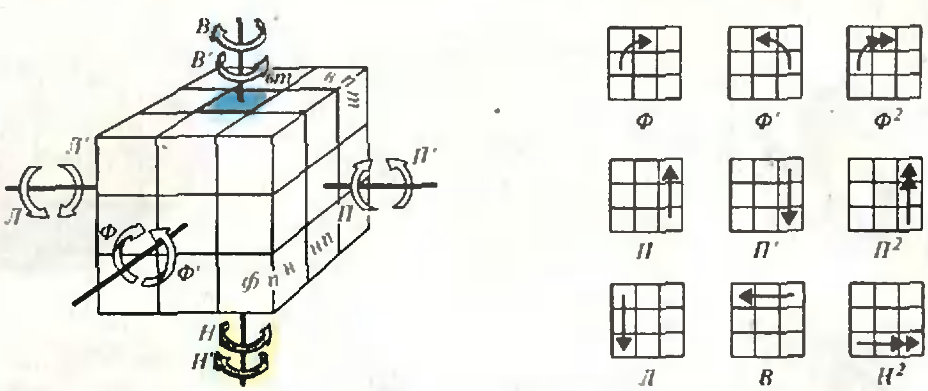


Рис. 0. «Стрелочные» и «буквенные» обозначения поворотов пяти граней (задняя грань нам не понадобится). Например, буква Ф обозначает поворот передней (Фасад) грани на 90° по часовой стрелке, Ф' — ее поворот на 90° против часовой стрелки. Ф² — ее поворот на 180°. На этом и следующих рисунках незакрашенные грани кубичков — это грани, цвет которых на данном рисунке мы не желаем фиксировать.

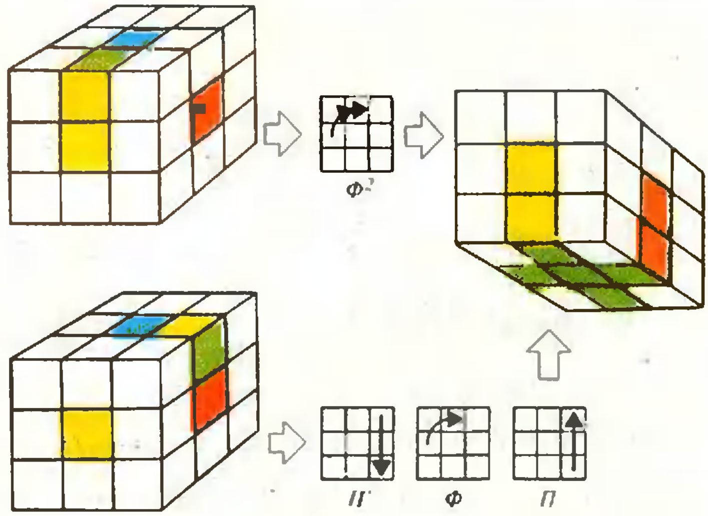


Рис. 1. Первый шаг: установка нижнего реберного кубичка.

Итак, начинаем!

Первый шаг. **Нижний крест:** *устанавливаем нижние реберные кубички* (рис. 1). Выберите какой-нибудь реберный кубичек с зеленой гранью, не стоящий в окончательном положении, и поворотом боковой грани, в которой он находится, переведите его в верхнюю грань. Пусть вторая грань выбранного кубичка — желтая; поворотом кубика сделайте грань с желтым центральным квадратом передней и поворотом верхней грани приведите кубик в какое-то из двух исходных положений рисунка 1. Действуйте согласно рисунку — выбранный кубичек окажется в нужном положении. Устанавливая каждый следующий реберный кубик, нельзя портить уже достигнутое (подумайте, как это сделать!).

В дальнейшем на всех рисунках мы тоже будем переднюю грань изображать желтой (то есть с жел-

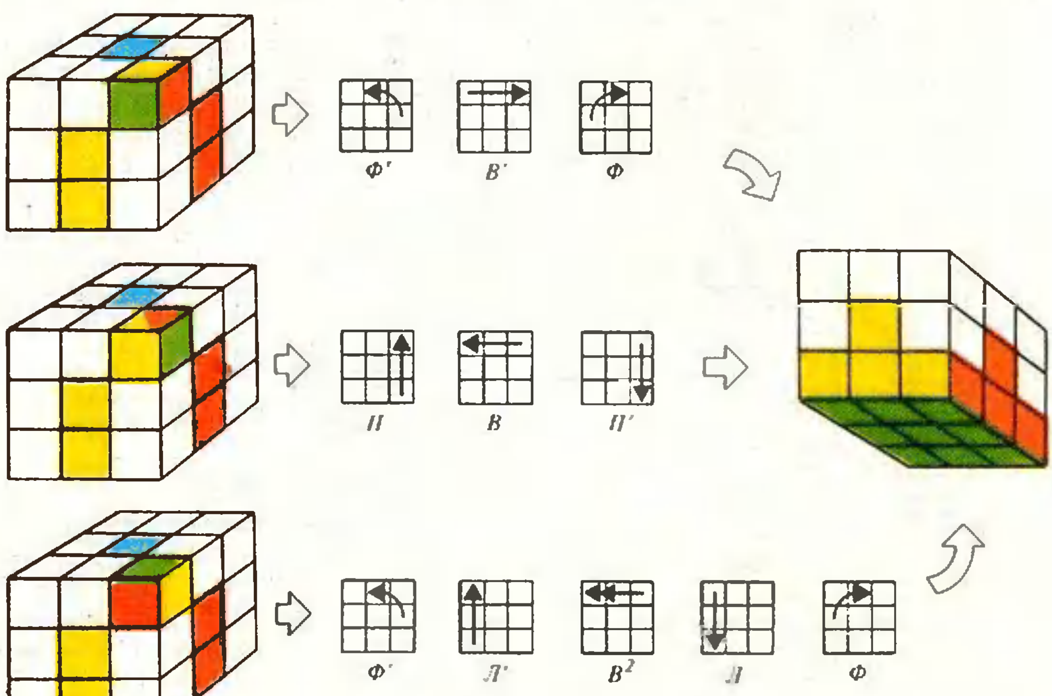


Рис. 2. Второй шаг: установка нижнего углового кубичка.

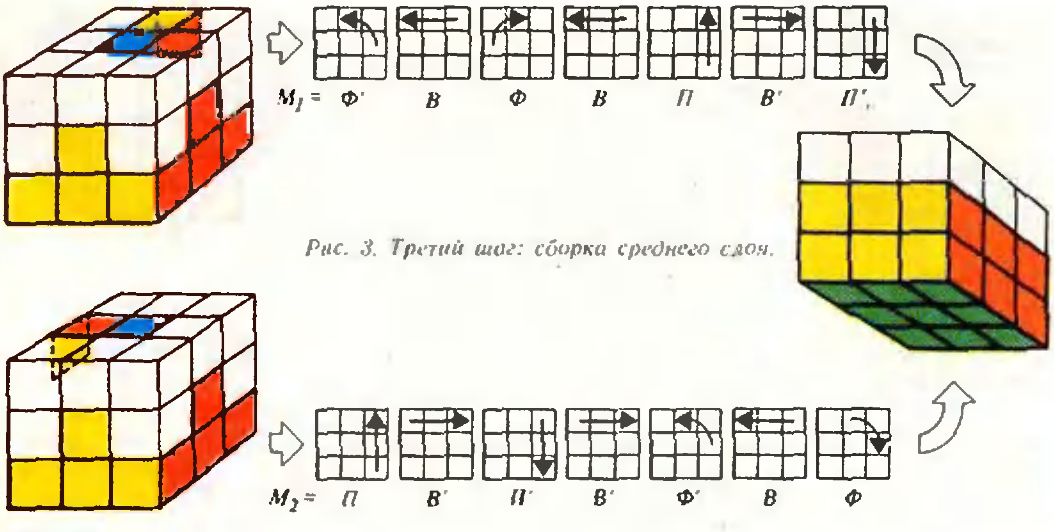


Рис. 3. Третий шаг: сборка среднего слоя.

тым центральным квадратом), правую — оранжевой. Но, разумеется, на каждом шаге, приводя кубик к исходному положению соответствующего рисунка, вам самим придется соображать, какую грань принять за переднюю.

Второй шаг. **Нижние углы:** *устанавливаем нижние угловые кубички* (рис. 2). Выберите какой-нибудь угловой кубичек с зеленой гранью, находящийся в верхнем слое, и поворотом верхней грани поставьте его точно над его местом в нижнем слое. При этом выбранный кубичек займет какое-то из трех исходных положений рисунка 2. Действуйте согласно рисунку — выбранный кубичек окажется в нужном положении. Если в верхнем слое не осталось угловых кубичков с зеленой гранью, но в нижнем слое какой-то угловой кубичек не стоит в окончательном положении, поверните кубик так, чтобы этот кубичек оказался «передним-правым-нижним», и проделайте любую из операций рисунка 2 — он окажется в верхнем слое.

Третий шаг. **Средний слой:** *устанавливаем средние реберные кубички* (рис. 3). Выберите какой-нибудь реберный кубичек без синих граней, находящийся в верхнем слое. Поворотом верхней грани приведите кубик в какое-то из двух исходных положений рисунка 3. Действуйте согласно рисунку — выбранный кубичек окажется в нужном положе-

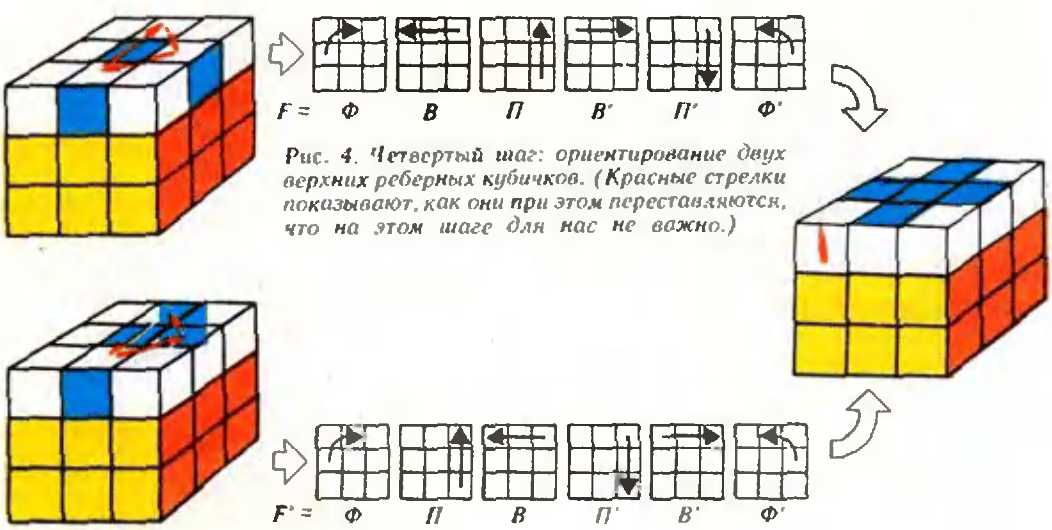


Рис. 4. Четвертый шаг: ориентирование двух верхних реберных кубичков. (Красные стрелки показывают, как они при этом переставляются, что на этом шаге для нас не важно.)

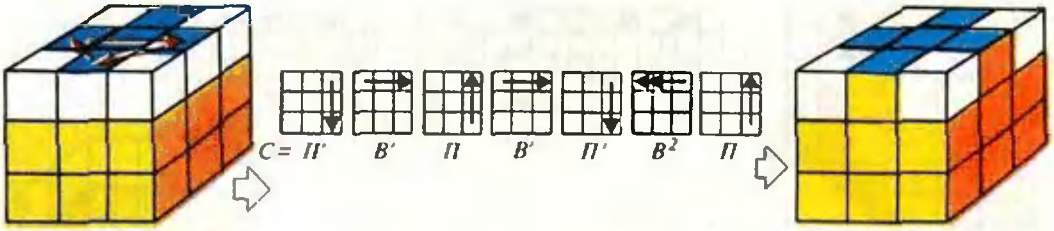


Рис. 5. Пятый шаг: перестановка трех верхних реберных кубичков.

нии. Если в верхнем слое не осталось реберных кубичков без синих граней, но какой-то из средних реберных кубичков не находится в окончательном положении, поверните кубик так, чтобы этот кубичек оказался «передним-правым», и проделайте л ю б у ю из операций рисунка 3 — он окажется в верхнем слое.

Ч е т в е р т ы й ш а г. **Ориентирование верхних реберных кубичков:** *устанавливаем верхние реберные кубички синими гранями вверх* (рис. 4). Неправильно повернутыми могут быть только два или четыре кубичка — поэтому достаточно уметь переворачивать любую пару. В зависимости от того, хотите вы перевернуть пару соседних или пару противоположных кубичков, выполните одну из двух операций рисунка 4 *) — выбранные кубички перевернутся. (При этом они еще и переставятся.)

П я т ы й ш а г. **Перестановка верхних реберных кубичков:** *расставляем верхние реберные кубички по своим местам, не переворачивая их* (рис. 5). Если один из них уже стоит правильно, а три других надо переставить по направлению часовой стрелки (случай А), поместите кубик в исходное положение рисунка 5 и действуйте согласно рисунку — кубички расставятся по своим местам. В противном случае поверните верхнюю грань так, чтобы какие-то два ее реберных кубичка встали правильно. (Это всегда возможно. Почему?) Если два других правильно не встанут, то дальше действуем в зависимости от того, являются ли «правильные» кубички соседними (случай Б) или противоположными (случай В). В случае Б поверните верхнюю грань еще на 90° против часовой стрелки — получится случай А. В случае В действуйте согласно рисунку 5, приняв за переднюю любую боковую грань кубика; после этого, повернув верхнюю грань на 90° в нужном направлении, опять придем к А. (Между прочим, случай В встречается в 5 раз реже случая Б — докажите!)

Остается уже немного.

Ш е с т о й ш а г. **Ориентирование верхних угловых кубичков:** *устанавливаем верхние угловые кубички синими гранями вверх* (рис. 6). После пятого шага неправильно повернутыми могут быть два, три или все четыре кубичка*). В случае трех «неправильных» кубичков поместите кубик в одно из двух исходных положений рисунка 6 и действуйте согласно рисунку — кубичка повернутся. (При этом они еще и переставятся.) Если надо перевернуть два или четыре кубичка, расположите кубик так, чтобы левый верхний угол передней грани был синим и выполните операцию T' для случая двух кубичков или T для четырех. После этого выполните операцию T, приняв за переднюю соответствующую боковую грань кубика.

И, наконец:

С е д ь м о й ш а г. **Перестановка верхних угловых кубичков:** *расставляем верхние угловые кубички по своим местам, не переворачивая их*

*) Присмотревшись к буквенной записи операций F и F', легко увидеть, что они являются взаимно обратными: $F'=F^{-1}$, кроме того, F' можно заменить на F^2. Аналогичные утверждения верны для операций T, T' (шестой шаг) и для операций Z, Z' (седьмой шаг).

*) Причем, например, в случае т р е х неправильно повернутых кубичков их синие грани должны обязательно выходить на р а з н ы е боковые грани кубика. Аналогичные утверждения выполняются и для двух или четырех кубичков. Об этом подробно рассказано в статье «Математика волшебного кубика».

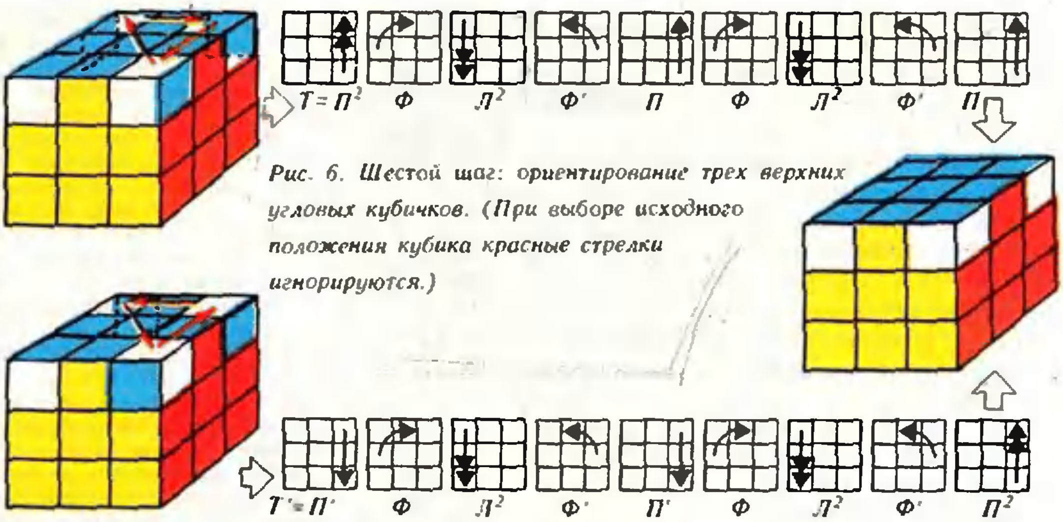


Рис. 6. Шестой шаг: ориентирование трех верхних угловых кубичков. (При выборе исходного положения кубика красные стрелки игнорируются.)

(рис. 7). После шестого шага либо все верхние угловые кубички встанут правильно, либо один из них встанет правильно, а три других надо циклически переставить, либо все они будут стоять неправильно. В первом случае все в порядке — кубик собран. Во втором случае, в зависимости от того, надо ли переставить «неправильные» кубички против часовой стрелки или по часовой стрелке, выполните одну из двух операций рисунка 7 — кубички расставятся по своим местам. В третьем случае выполните л ю б у ю из операций рисунка 7, приняв за переднюю любую боковую грань кубика, — один угловой кубичек встанет правильно, и мы получим предыдущий случай*).

Все. Можно вздохнуть с облегчением — кубик собран!

* * *

Читатель нашего журнала вряд ли удовлетворится тем, что научится собирать кубик по шпаргалке. Как же без нее обойтись? Конечно, все нужные операции можно просто запомнить. И подобраны они так, чтобы это было не слишком трудно.

*) Попробуйте доказать, что в любом случае можно обойтись не более чем двукратным применением операции Z.

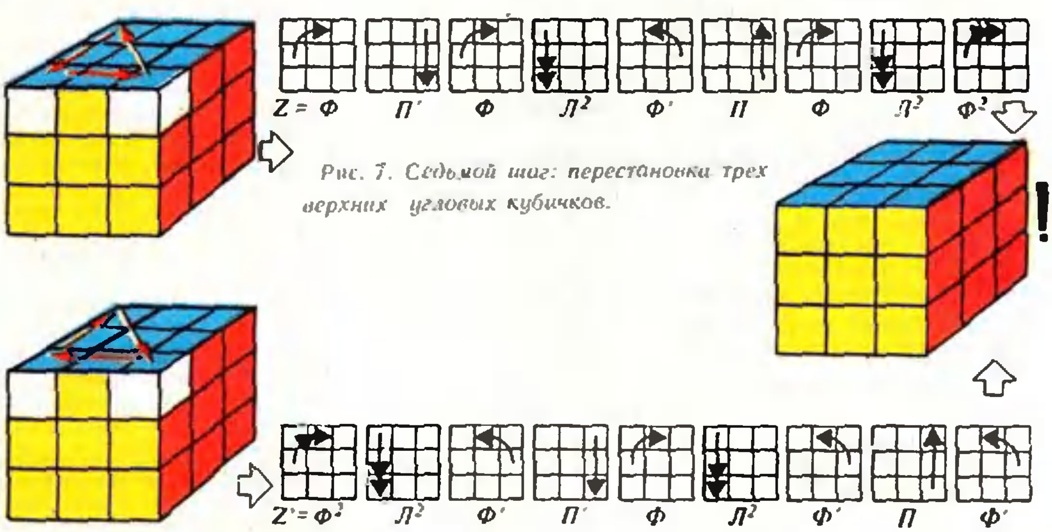


Рис. 7. Седьмой шаг: перестановки трех верхних угловых кубичков.

Операции первых двух шагов совсем короткие. Советуем вам проделать их медленно, поворот за поворотом, и проследить за передвижениями тех кубичков, которые устанавливаются в правильное положение с их помощью, — вы поймете, как эти операции «работают», и научитесь выполнять их не задумываясь. Для каждого из следующих шагов можно запомнить только одну операцию; вторую (там, где она есть) всегда можно заменить на дважды проделанную первую. Отметим еще, что 5 последних ходов операции M_1 (3-й шаг) совпадают с 5-ю первыми ходами F (4-й шаг) и что операция Z (7-й шаг) получается из T (6-й шаг) заменой первого хода $П^2=П'П'$ на $ФП'$ и двух последних — $Ф°П$ — на $Ф'Ф'=Ф^2$. Так что по сути дела надо выучить только три основные операции M_1, C, T и некоторые их варианты.

Однако гораздо интереснее и полезнее проникнуть в «принцип действия» этих операций.

Рассмотрим для начала операцию $M_1=Ф'ВФ \cdot В \cdot ПВ'П'$. Первые три ее поворота $Ф'ВФ$ аналогичны трехходовкам 2-го шага и переводят кубичек *фпн* (способ обозначения кубичков см. на рис. 0) из нижнего слоя в верхний, причем так, что он правильным образом приставляется к соответствующему реберному кубичку (проверьте!); похожи на них и последние три поворота $ПВ'П'$, возвращающие кубичек *фпн* (вместе с приставленным к нему реберным) на место; промежуточный поворот $В$ готовит исходную позицию для последних трех поворотов. Проанализируйте самостоятельно операцию M_2 и операцию $M_3=Ф'ВФВ^2ПВ^2П'$, которую можно применять вместо M_1. После этого попробуйте на той же основе придумать операции, аналогичные M_1 и M_2, для случая, когда кубичек *фпн* стоит на своем месте, но ориентирован неправильно. Можно пойти дальше и разработать операции, позволяющие объединить 2-й и 3-й шаги, то есть одновременно с каждым нижним угловым кубичком устанавливать и примыкающий к нему реберный кубичек среднего слоя.

Операции 4-го и 5-го шагов построены на основе так называемых *коммутаторов*, то есть последовательностей вида $xyx^{-1}y^{-1}$ (x^{-1} — это поворот, обратный к x: $Ф^{-1}=Ф'$, $(Ф')^{-1}=Ф$, $(Ф^2)^{-1}=Ф^2$). Если x и y — это повороты двух смежных граней кубика X и Y (на $\pm 90°$ или $180°$), то коммутатор $xyx^{-1}y^{-1}$ циклически переставляет три реберных кубичка: один — из грани X, другой — из Y, третий — на общем ребре X и Y (проверьте!); при этом переставляются и некоторые угловые кубички, но здесь это нас почти не интересует *). Например, коммутатор $ВПВ'П'$ осуществляет перестановку *фп→вт→вп→фп*. Если же перед ним выполнить поворот $Ф$, а после него $Ф'$, то есть операцию $F=Ф \cdot ВПВ'П \cdot Ф'$, то в этой перестановке вместо кубичка *фп* будет участвовать *фв* (он занимает место *фп* при повороте $Ф$). В результате переставляются три реберных кубичка одной грани — верхней: *фв→вт→вп→фв*, причем два из них, *фв* и *вп*, переворачиваются (это нам и нужно на 4-ом шаге); существенно также и то, что нижние угловые кубички остаются на своих местах. Аналогично устроены операции $F'=Ф \cdot ПВП'В' \cdot Ф'$ и $C=П'В' \cdot ПВ'П'В \cdot ВП$. Придумайте сами другие аналогичные операции; попробуйте научиться сразу составлять верхний крест (шаги 4-й и 5-й), используя не более двух операций такого типа.

Описанный прием преобразования операций (в данном случае — коммутаторов) называется *сопряжением*; в общем виде: $g=a \cdot f \cdot a^{-1}$ — операция, *сопряженная* с f. Этот же прием использован для образования операций двух последних шагов T и Z; обе они сопряжены с $Y=П'ФЛ^2Ф'ПФЛ^2Ф'$: $T=П'YП$, а $Z=Ф'YФ$. Операция Y переставляет три угловых кубичка (*фпв→нпф→лвт→фпв*), оставляя все остальные кубички на местах.

Рекомендуем читателю самостоятельно составить и проделать другие операции по общей схеме $A \cdot BCB^{-1} \cdot A^{-1} \cdot BC^{-1}B^{-1}$, где A и C — повороты двух противоположных граней (на любые из углов $\pm 90°$, $180°$), а B — поворот перпендикулярной им грани (на $\pm 90°$). Можете ли вы объяснить, почему все они циклически переставляют какие-то три угловых кубичка? (Заметьте, что при операции BCB^{-1} в грани A заменяется ровно один кубичек (угловой) — на кубичек из грани C; ср. операции 2-го шага.) Для того чтобы сразу выполнить оба последних шага сборки кубика, всегда достаточно трех и почти всегда — двух операций такого вида (или сопряженных с ними).

Мы раскрыли все секреты описанного метода сборки кубика Рубика и объяснили, как его можно сократить. Остальное — дело рук самих читателей.

*) Алгоритм сборки кубика, целиком основанный на коммутаторах, был опубликован в статье «Венгерский шарнирный кубик».

задачник Кванта

Задачи

М821—М825; Ф833—Ф837

М821. Решите уравнение $x^3+x^2+x=-\frac{1}{3}$.

Ю. И. Ионин

М822. Карточки четырех цветов — n зеленых, n красных, n синих и n желтых — сложены стопкой так, что через четыре карточки цвет повторяется (например, 1-я, 5-я, 9-я, ... карточки — красные, 2-я, 6-я, ... — желтые и т. д.). Несколько карточек сверху сняли, не перекладывая перевернули и произвольным образом

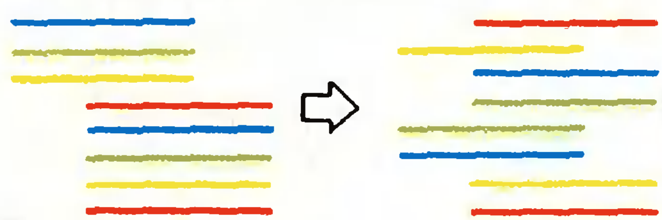


Рис. 1.

вставили между оставшимися (рис. 1). После этого стопку разделили на n маленьких стопок по четыре карточки. Докажите, что в каждой из этих четверок встретятся карточки всех четырех цветов.

С. Б. Шлосман

М823. С фотографии срисован (рис. 2) контур дома длиной 60 м и шириной 15 м, причем более длинная стена на фотографии слева (остальные части контура на фотографии загорожены веткой дерева). Требуется:

а) дорисовать контур;

б) нарисовать точную карту (проекцию на горизонтальную плоскость), на которой указать контур дома и точку съемки;

в) определить высоту дома и высоту, с которой производилась съемка.

Д. Б. Фукс

М824. В сетке, изображенной на рисунке 3, каждая ячейка имеет размер 1×1. Можно ли эту сетку представить в виде объединения

а) 8 ломаных длины 5;

б) 5 ломаных длины 8? (8)

Н. И. Авилов

М825. Множество M состоит из k попарно не пересекающихся отрезков, лежащих на одной

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 30 ноября 1983 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 9 — 83» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М821, М822» или «Ф833». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи М824, М825 и Ф833—Ф837 предлагались на заключительном этапе Всесоюзной олимпиады школьников. Число в скобках обозначает класс, в котором предлагалась задача.

Напоминаем читателям, что в декабре мы подведем итоги конкурса на решение задач из «Задачника «Кванта» (учитываться будут письма, присланные до 10 декабря). Победители получают право участвовать в республиканских олимпиадах, соответственно, по математике или физике. При оценке успехов школьников по математике будут приниматься во внимание также письма по поводу «задач для исследования» (см. № 5, с. 37, «Разложения на различные множители»; № 7, с. 33)

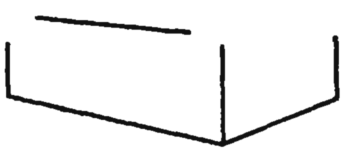


Рис. 2.

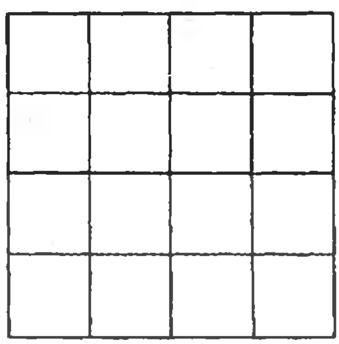


Рис. 3.

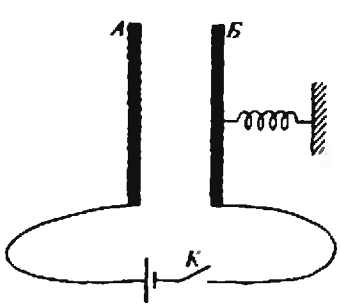


Рис. 4.

прямой. Известно, что любой отрезок длины, не большей 1, можно расположить на прямой так, чтобы его концы принадлежали множеству M. Докажите, что сумма длин отрезков, составляющих M, не меньше $1/k$. (10)

Е. И. Хухро

Ф833. На ленту транспортера, ползущую со скоростью $v_0 = 1$ м/с, сбоку сталкивают коробку. Скорость коробки сразу после попадания на ленту равна $u_0 = 2$ м/с и перпендикулярна скорости ленты. Какую минимальную скорость относительно Земли будет иметь коробка во время движения? Сила трения достаточно велика, и коробка не соскальзывает с ленты. (8)

С. С. Кротов

Ф834. На очень длинной невесомой нити подвешен к потолку шарик массы $m_1 = 0{,}1$ кг, к нему прикреплен на нити длины $l = 0{,}2$ м шарик массы $m_2 = 0{,}05$ кг. Нижнему шарику толчком сообщают скорость v_0 в горизонтальном направлении. При какой величине v_0 шарики могут оказаться на одной высоте? (9)

Е. И. Бутиков

Ф835. В стакан с водой опустили нагреватель и сняли зависимость температуры воды от времени (см. таблицу).

1) На сколько градусов остынет вода за 1 мин, если нагреватель отключить от сети при температуре $t_1 = 50\,°C$?

2) Закипит ли вода, если нагреватель не выключать достаточно долго?

Мощность нагревателя считать неизменной. (8)

Время, τ мин	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Температура, t °C	20	26,2	31,8	36,8	41,4	45,6	49,3	52,7	55,8	58,5	61,1

А. Р. Зильберман

Ф836. Пластина A плоского конденсатора неподвижна, пластина $Б$ прикреплена к стенке пружиной и может двигаться, оставаясь параллельной пластине A (рис. 4). После замыкания ключа K пластина $Б$ начала двигаться и остановилась в новом положении равновесия. При этом расстояние между пластинами уменьшилось на $\alpha_1 = 10\%$. На сколько изменилось бы равновесное расстояние между пластинами, если бы ключ K замкнули на короткое время? Предполагается, что за это время пластина $Б$ не успевает заметно сдвинуться. (9)

А. И. Буздин

Ф837. Для измерения скоростей частиц используется лазерный анемометр, в котором движу-

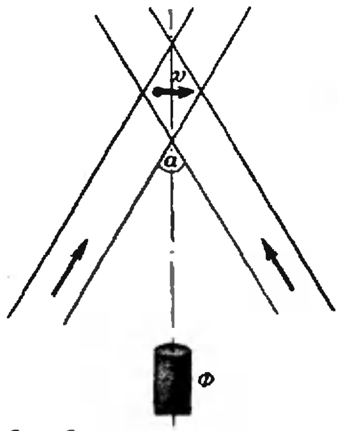


Рис. 5.

щиеся частицы освещаются двумя пересекающимися лазерными когерентными пучками света (рис. 5). Отраженный частицами свет улавливается фотоэлементом *Ф* и преобразуется в электрический сигнал. Частицы движутся по перпендикуляру к биссектрисе угла $\alpha=60°$ между пучками. С какой скоростью двигалась частица, если при длине волны лазерного излучения $\lambda=0{,}63$ мкм был зарегистрирован периодический сигнал с частотой $\nu=320$ кГц? (10)

В. В. Можаев

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandart ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later that November 30th 1983 to the following adress: USSR, Moscow, 103006, Москва, К-6, ул. Горького, д. 32/1, «Квант». Please send us the solutions of physics and mathematics problems, as well as solutions from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfadressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. One the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

Problems

M821—M825; P833—P837

M821. Solve the equation $x^3+x^2+x=-1/3$.

Yu. I. Ionin

M822. Cards of four colours — *n* green, *n* red, *n* blue and *n* yellow ones — are stacked in a deck so that any colour is repeated every four cards (e. g., the first, fifth, ... ninth, ... cards are red, the second, sixth, ... are yellow, etc.). Several cards are taken off the top, turned over (all together as a whole) and slipped in somewhere between the others (see figure Рис. 1). After that, the deck is divided in succession into *n* groups of four cards each.

Prove that the four cards in each group will be of four different colours.

S. B. Shlosman

M823. The outline of a rectangular house of length 60 *m* and width 15 *m* is copied from a photograph (see figure Рис. 2), the longer wall being on the left of the photograph (the other parts of the outline are hidden by tree branches). It is required

a) to draw the rest of the outline;

b) to draw an exact map (i. e. the projection on the horizontal plane) showing the outline of the house and the point where the photograph was taken;

c) to determine the height of the house and the elevation of the camera above the horizontal plane.

D. B. Fuchs

M824. Each square of the lattice shown on figure Рис. 3 is of size 1×1. Can this lattice be represented as the union of

a) 8 polygonal lines of length 5;

b) 5 polygonal lines of lingth 8?

A. I. Avilov

M825. The set *M* consists of *k* non-intersecting line segments all contained in one line. It is known that any segment of length less than 1 may be placed on the line so that its end points belong to the set *M*. Prove that the total length of the line segments in *M* is not less than $1/k$.

E. I. Hukro

P833. A box is pushed sideways on a conveyor belt moving with velocity $v_0=1$ m/s. The velocity of the box immediately after it comes into contact with the belt is directed perpendicularly to the belt's motion and is $u_0=2$ m/s. What will the minimal velocity of the box with respect to the Earth be? The force of friction is large enough to ensure that the box does not slide off the conveyor belt.

S. S. Krotov

P834. A ball of mass $m_1=0.1$ kg is suspended from the ceiling by a very long weightless string. Another ball,

Problems M824, M825 and R833—R837 were proposed at the final round of the All-Union School Olympiad.

of mass $m_2=0.05$ kg is tied to the first one by a string of length $l=0.2$ m. The lower ball is given a push after which it moves horizontally with velocity v_0. For what values of v_0 can the two balls reach the same horizontal level?

E. I. Butikov

P835. A heater was placed in a glass of water and the water temperature registered as a function of time (see table).

1) By how many degrees will the water cool in 1 min, if the heater is turned off when the temperature is $t_1=50$ °C?

2) Will the water boil, if the heater is turned on long enough? The power of the heater is assumed constant.

Time, τ min	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Temperature, t °C	20	26.2	31.8	36.8	41.4	45.6	49.3	52.7	55.8	58.5	61.1

A. R. Zilberman

P836. The plate A of a flat capacitor is motionless, the plate Б is joined by a spring to the wall and can move, remaining parallel to A (see figure Рис. 4). After the switch K is turned on, the plate Б begins to move and stops in a new equilibrium position, the distance between the plates decreasing by $\alpha_1=10\%$. How would the equilibrium distance between the plates have changed if the switch K was turned on only for a brief period of time? It is assumed that the plate Б does not have enough time to move noticeably during this period.

A. I. Buzdin

P837. A laser anemometer is used to measure the velocity of particles which move through two intersecting coherent laser light beams (see figure Рис. 5). The light reflected by the particles is registered by the photoelement Ф and is transformed into an electric impulse. The particles move perpendicularly to the bissector of the angle $\alpha=60°$ between the beams. In what direction did a particle move, if a periodic signal of frequency $\nu=320$ kHz was registered (for laser beam wavelength $\lambda=0.63$ mkm).

V. V. Mojaev

Решения задач

M806—M810; Ф818—Ф822

M806. *а) Докажите, что если* $a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\ldots+\frac{a_n}{n}=0$, *то многочлен* $a_nx^{n-1}+a_{n-1}x^{n-2}+\ldots+a_2x+a_1$ *имеет корень между 0 и 1.*

б) Докажите, что если для некоторого $p>0$

$$\frac{a_1}{p+1}+\frac{a_2}{p+2}+\frac{a_3}{p+3}+\ldots+\frac{a_n}{p+n}=0,$$

то этот многочлен также имеет корень между 0 и 1.

Докажем сначала такое утверждение: ***если дифференцируемая функция $f(x)$ обращается в ноль в точках $x=0$ и $x=1$, то ее производная должна обратиться в ноль в некоторой внутренней точке отрезка*** $[0;1]$.

Это очевидно, если функция $f(x)$ тождественно равна 0 на отрезке $[0;1]$. В противном случае рассмотрим точки, в которых она принимает свое наибольшее и наименьшее значения на этом отрезке. (Такие точки существуют по теореме Вейерштрасса — см. учебник «Алгебра и начала анализа 9—10», п. 28 — ибо функция $f(x)$, будучи дифференцируемой, непрерывна.) Одно из этих значений должно быть отлично от нуля и, следовательно, принимается в точке x_0, лежащей *внутри* отрезка $[0;1]$. Таким образом, x_0 — точка экстремума функции $f(x)$ на интервале $]0;1[$, и по теореме Ферма («Алгебра и начала анализа 9—10», п. 26) $f'(x_0)=0$.

Воспользуемся доказанным утверждением для решения задачи.

а) Рассмотрим функцию $f(x)=a_1x+\frac{a_2}{2}x^2+\ldots+\frac{a_n}{n}x^n$. По условию $f(1)=a_1+\frac{a_2}{2}+\ldots+\frac{a_n}{n}=0$, кроме того, $f(0)=0$.

Согласно доказанному утверждению $f'(x_0)=0$ при некотором x_0 из интервала $]0;1[$. Остается заметить, что $f'(x)=a_1+a_2x+\ldots+a_nx^{n-1}$.

б) Доказательство такое же, как в п. а) с той разницей, что вместо функции $f(x)$ надо взять $g(x)=\frac{a_1}{p+1}x^{p+1}+\frac{a_2}{p+2}x^{p+2}+\ldots+\frac{a_n}{p+n}x^{p+n}$ и учесть, что в равенстве $g'(x_0)=x_0^p(a_1+a_2x_0+\ldots+a_nx_0^{n-1})=0$ множитель x_0^p ненулевой.

А. Гохберг, М. Овецкий

◆

М807. *а) Из произвольной точки M внутри равностороннего треугольника опущены перпендикуляры MK_1, MK_2, MK_3 на его стороны. Докажите, что сумма векторов $\overrightarrow{MK_1}+\overrightarrow{MK_2}+\overrightarrow{MK_3}$ равна $\frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$, где O — центр треугольника.*

б) Из произвольной точки M опущены перпендикуляры MK_1, ..., MK_n на все стороны правильного n-угольника или их продолжения. Докажите, что

$$\overrightarrow{MK_1}+\ldots+\overrightarrow{MK_n}=\frac{n}{2}\overrightarrow{MO},$$

где O — центр n-угольника.

в) Из произвольной точки M внутри правильного тетраэдра опущены перпендикуляры MK_1, MK_2, MK_3, MK_4 на его грани. Докажите, что

$$\overrightarrow{MK_1}+\overrightarrow{MK_2}+\overrightarrow{MK_3}+\overrightarrow{MK_4}=\frac{4}{3}\overrightarrow{MO},$$

где O — центр тетраэдра.

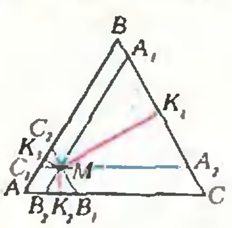


Рис. 1.

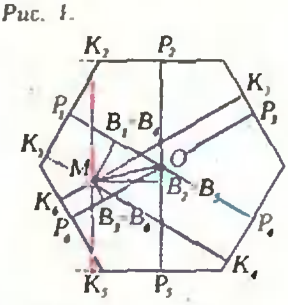


Рис. 2.

а) Проведем через точку M прямые, параллельные сторонам треугольника и обозначим точки пересечения этих прямых со сторонами треугольника, как показано на рисунке 1.

Ясно, что $2\overrightarrow{MK_1}=\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}$, $2\overrightarrow{MK_2}=\overrightarrow{MB_1}+\overrightarrow{MB_2}$, $2\overrightarrow{MK_3}=\overrightarrow{MC_1}+\overrightarrow{MC_2}$ и, в то же время, $\overrightarrow{MC_1}+\overrightarrow{MB_2}=\overrightarrow{MA}$; $\overrightarrow{MC_2}+\overrightarrow{MA_1}=\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{MA_2}+\overrightarrow{MB_1}=\overrightarrow{MC}$. Поэтому

$$2(\overrightarrow{MK_1}+\overrightarrow{MK_2}+\overrightarrow{MK_3})=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}.$$

Но, очевидно, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$, следовательно, $2(\overrightarrow{MK_1}+\overrightarrow{MK_2}+\overrightarrow{MK_3})=3\overrightarrow{MO}$, что и требовалось.

б) Докажем сначала, что *если O — центр правильного многоугольника $A_1\ldots A_n$, то $\overrightarrow{OA_1}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}$.*

В самом деле, при повороте на $\frac{360°}{n}$ вокруг O вершина A_1 перейдет в A_2, A_2 — в A_3, ..., A_n — в A_1, а вектор $\vec{s}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}$ — в $\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}+\overrightarrow{OA_1}=\vec{s}$, то есть не изменится. Поэтому $\vec{s}=\vec{0}$.

Опустим перпендикуляры OP_1, ..., OP_n на стороны данного правильного многоугольника ($OP_i\|MK_i$), затем опустим из точки M перпендикуляры MB_i на прямые OP_i (при четном n прямые OP_i и $OP_{i+n/2}$, $i=1, 2, \ldots, n/2$, совпадают и $B_i=B_{i+n/2}$; см. рис. 2 для $n=6$). Поскольку $\overrightarrow{MK_i}=\overrightarrow{B_iP_i}=\overrightarrow{B_iO}+\overrightarrow{OP_i}$ и $P_1P_2\ldots P_n$ — правильный n-угольник с центром O,

$$\overrightarrow{MK_1}+\overrightarrow{MK_2}+\ldots+\overrightarrow{MK_n}=(\overrightarrow{B_1O}+\overrightarrow{B_2O}+\ldots+\overrightarrow{B_nO})+(\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\ldots+\overrightarrow{OP_n})=\overrightarrow{B_1O}+\overrightarrow{B_2O}+\ldots+\overrightarrow{B_nO}. \quad (1)$$

Докажем, что точки B_1, ..., B_n лежат в вершинах правильного m-угольника (где $m=n$, если n нечетно, и $m=n/2$, если n четно) с центром в середине O_1 отрезка MO.

Точки B_1, ..., B_n лежат на окружности с диаметром MO (ибо $\widehat{MB_iO}=90°$), *поэтому достаточно доказать, что угловая величина любой из дуг, на которые эта окружность разбивается точками B_1, ..., B_n, равна $360°/n$.* Пусть B_iB_j — одна из этих дуг и она не содержит точку O. Тогда $\angle B_iOB_j$ есть один из $2m$ равных углов, на которые разбивается плоскость m прямыми $OB_i=OP_i$ (см. рис. 3, где $n=m=5$, $i=2$, $j=4$). Следовательно, $\widehat{B_iOB_j}=180°/m$ и $\smile B_iB_j=360°/m$. Дуга, содержащая точку O, также имеет величину $360°-(m-1)\cdot 360°/m=360°/m$.

Из доказанного вытекает, что $\overrightarrow{O_1B_1}+\ldots+\overrightarrow{O_1B_n}=\vec{0}$, и согласно (1)

$$\overrightarrow{MK_1}+\ldots+\overrightarrow{MK_n}=\overrightarrow{B_1O_1}+\overrightarrow{B_2O_1}+\ldots+\overrightarrow{B_nO_1}+n\overrightarrow{O_1O}=\frac{n}{2}\overrightarrow{MO}.$$

Отметим, что эту задачу можно решить также методом пункта а).

в) Достаточно доказать, что проекции векторов $\overrightarrow{MK_1}+\ldots+\overrightarrow{MK_4}$ и $\frac{4}{3}\overrightarrow{MO}$ на какие-то две пересекающиеся плоскости совпадают. (Действительно, отсюда следует,

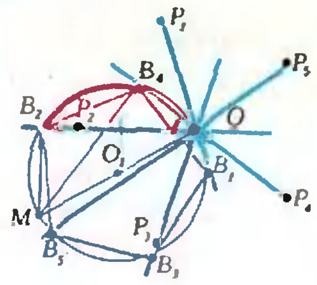


Рис. 3.

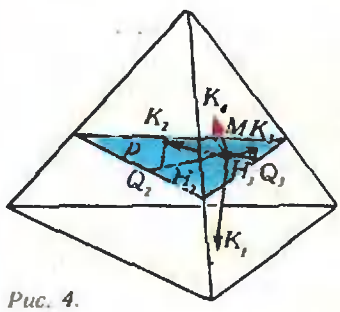


Рис. 4.

что две проекции разности $\vec{d}$ этих векторов равны нуль-вектору, то есть вектор $\vec{d}$ перпендикулярен одновременно двум пересекающимся плоскостям, а значит, $\vec{d}=0$).

Эти плоскости можно выбрать так, чтобы доказательство свелось к плоскому случаю — задаче а). Именно, проведем через точку M плоскость p, перпендикулярную, скажем, $\overrightarrow{MK_4}$, и спроектируем на нее векторы $\overrightarrow{MK_i}$, $i=1, 2, 3$ (рис. 4). Каждый из них образует с плоскостью p угол γ, равный углу между высотой и боковой гранью правильного тетраэдра $\left(\cos^2\gamma=\frac{8}{9}\right)$, поэтому проекция вектора $\overrightarrow{MK_i}$ равна $\overrightarrow{MH_i}=\frac{8}{9}\overrightarrow{MQ_i}$, где Q_i — проекция точки M на соответствующую сторону треугольника, получающегося в сечении тетраэдра плоскостью p. Пусть O' — центр этого треугольника, тогда, согласно а),

$$\overrightarrow{MH_1}+\overrightarrow{MH_2}+\overrightarrow{MH_3}=\frac{8}{9}(\overrightarrow{MP_1}+\overrightarrow{MP_2}+\overrightarrow{MP_3})=$$
$$=\frac{8}{9}\cdot\frac{3}{2}\overrightarrow{MO'}=\frac{4}{3}\overrightarrow{MO'}.$$

Остается заметить, что левая часть этого равенства есть проекция суммы $\overrightarrow{MK_1}+\ldots+\overrightarrow{MK_4}$ на плоскость p (проекция суммы векторов равна сумме их проекций), а правая — проекция вектора $\frac{4}{3}\overrightarrow{MO}$. Это же рассуждение годится и для плоскостей, параллельных другим граням тетраэдра.

Попробуйте решить задачу а) аналогичным способом, сведя двумерный случай к одномерному с помощью проекции.

Наметим еще одно решение задачи в) (которое можно приспособить и к задачам а) и б)). Рассмотрим вектор разности $\vec{d}=(\overrightarrow{MK_1}+\overrightarrow{MK_2}+\overrightarrow{MK_3}+\overrightarrow{MK_4})-\frac{4}{3}\overrightarrow{MO}$ как функцию от вектора $\vec{a}=\overrightarrow{MO}$. Легко проверить, что утверждение задачи справедливо для вершин A_1, A_2, A_3, A_4 тетраэдра, значит, $\vec{d}(\overrightarrow{A_iO})=\vec{0}$. Кроме того, $\vec{d}(\vec{a})$ — *линейная векторная функция*, то есть $\vec{d}(\vec{a}+\vec{b})=\vec{d}(\vec{a})+\vec{d}(\vec{b})$ и $\vec{d}(k\vec{a})=k\vec{d}(\vec{a})$. (Действительно, сумма векторов $\overrightarrow{MK_i}$ равна сумме проекций вектора $\overrightarrow{MO}$ на четыре прямые, перпендикулярные граням тетраэдра, — это доказывается так же, как равенство (1) в пункте б), в котором векторы $\overrightarrow{B_iO}$ как раз и являются проекциями $\overrightarrow{MO}$ на прямые, перпендикулярные сторонам n-угольника. Но легко видеть, что проекция вектора на прямую является линейной функцией этого вектора.) Отсюда вытекает, что $\vec{d}(\vec{a})=\vec{0}$ для любого вектора $\vec{a}$, поскольку его всегда можно представить в виде $k_1\overrightarrow{A_1O}+k_2\overrightarrow{A_2O}+k_3\overrightarrow{A_3O}$.

В. В. Прасолов

◆

М808. *На бесконечном листе клетчатой бумаги двое играют в такую игру: первый окрашивает какую-нибудь клетку в красный цвет, второй — k (неокрашенных) клеток в синий цвет, затем снова первый одну (неокрашенную) — в красный, второй — k клеток в синий и т. д. Первый стремится к тому, чтобы какие-нибудь четыре красные клетки расположились в вершинах квадрата (со сторонами, параллельными ли-*

Ответ: второй игрок не сможет помешать первому ни при каком k.

Решать задачу удобно с конца. Ясно, что первый игрок (будем называть его K — «красный») выиграет, если каким-то своим ходом он построит сразу $k+1$ «неполных» квадратов, в трех вершинах каждого из которых стоят красные клетки, а в четвертой — неокрашенная. Тогда после ответа второго игрока (назовем его C — «синий») хотя бы одна из четвертых вершин останется неокрашенной и, окрасив ее, K получит «красный квадрат». Примеры таких выигрышных позиций приведены на рисунках 1, *а* — для общего случая — и 1, *б* — для $k=1$ (в последнем случае K может действовать так же, как и в общем, при произвольном $k>1$, но у него есть и более экономный путь к победе, использующий симметрию квадратной решетки).

ниям сетки). Сможет ли второй ему помешать а) при $k=1$; б) при $k=2$; в)* при каком-либо $k>2$?*

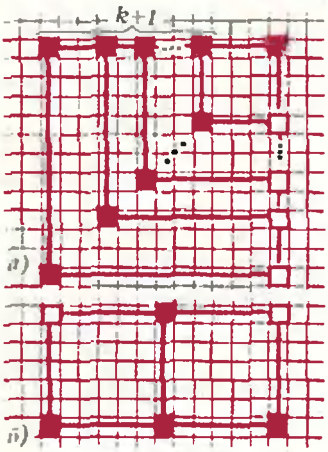


Рис. 1. Выигрышные позиции для первого игрока а) при произвольном $k\geqslant 1$; б) при $k=1$. Клетки, обведенные рамками, не окрашены ни красным, ни синим цветом. Звездочкой помечена последняя клетка, окрашенная первым игроком.

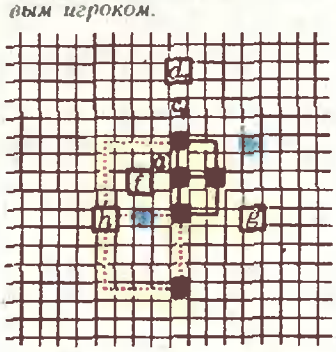


Рис. 2.

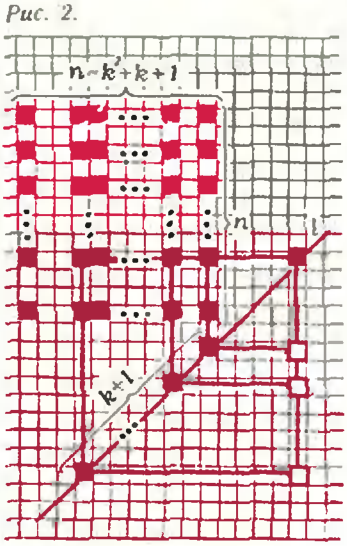


Рис. 3.

Объясним, как должен играть K, чтобы получить эти позиции.

а) Пусть a и a' — первые клетки, окрашенные, соответственно, игроками K и C (рис. 2). Вторым ходом K окрашивает клетку b, стоящую в одном столбце с a так, что расстояние между клетками b и a больше, чем между a' и a. После ответного хода C одна из клеток c и c_1 того же столбца (см. рисунок 2), например, c, останется неокрашенной. Ее окрашивает K третьим ходом. Аналогично, четвертым ходом K окрашивает клетку d или d_1. Допустим, он окрасил d, тогда рассмотрим столбцы, содержащие клетки e, f, g и h. Один из них, например, содержащий e, свободен от синих клеток, потому что синих клеток всего четыре и одна из них — a' — заведомо не стоит в этих столбцах. Окрасив e, игрок K получит позицию рисунка 1, б (клетки a, b, c и e на рисунке 2).

б), в) Игрок K начинает с того, что окрашивает N клеток одной строки, не обращая внимания на расстояния между ними (*число N зависит от k; мы уточним его ниже*). Затем под первой строкой K выбирает строку, в которой нет синих клеток, и окрашивает в ней клетки, стоящие точно под красными клетками первой строки (пока среди них еще есть неокрашенные красным или синим цветом). Под второй строкой K выбирает третью (свободную от синих клеток) и окрашивает в ней клетки, стоящие под красными клетками второй строки, и т. д. Заполнив таким образом n строк (число n определим позже), K должен выбрать прямую l, проходящую по диагоналям клеток (рис. 3) под всеми окрашенными клетками (красными и синими), и окрасить на ней $k+1$ клеток, стоящих точно под клетками последней, n-й строки. Поскольку на каждую новую красную клетку приходится k синих, для этого достаточно, чтобы в n-й строке было k^2+k+1 красных клеток. (Тогда в ответ на первые k клеток прямой l, которые окрасит K, C окрасит k^2 клеток, после чего под красными клетками n-й строки на прямой l останется еще хотя бы одна неокрашенная клетка.) Красные клетки на прямой l вместе с лежащими над ними клетками одной из n строк и клеткой a на пересечении этой строки с прямой l (рис. 3) и образуют выигрышный «клин», показанный на рисунке 1, а. Надо только выбрать эту строку так, чтобы клетка a и все клетки под ней не были синими. А это всегда можно сделать, если число строк n больше числа синих клеток на прямой l и под ней, которое не превосходит $(k+1)k=$ $=k^2+k$, например, при $n=k^2+k+1$.

Итак, число N должно быть настолько велико, чтобы игрок K смог заполнить указанным образом $n=k^2+k+1$ строк и окрасить в последней n клеток. Можно взять $N=$ $=(k+1)^n\cdot k+1$. Действительно, как мы видели, чтобы K мог окрасить $k+1$ клеток на прямой l, в n-й строке надо было окрасить $(k+1)\cdot k+1$ клеток красным цветом; аналогично доказывается, что для этого в $(n-1)$-й строке должно находиться $(k+1)^2\cdot k+1$ красных клеток, в $(n-2)$-й — $(k+1)^3\cdot k+1, \ldots$, а в первой — $(k+1)^n\cdot k+1$ красных клеток.

Отметим, что это решение идейно близко к решению задачи М750 («Квант», 1982, № 12; см. также статью С. Н. Беспамятных в «Кванте» № 6 за этот год).

Д. Г. Азов

М809. *Найдите сумму*

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{n-1}{n!}$$

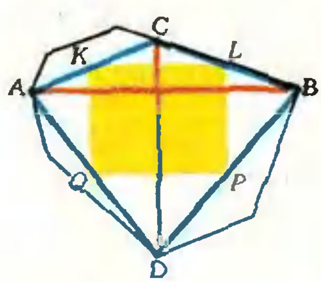
(через k! обозначается произведение 1 • 2 • 3 • ... • k).

Ответ: $1-\frac{1}{n!}$. Получить ответ совсем легко, если представить k-е слагаемое искомой суммы в виде $\frac{k}{(k+1)!}=$ $=\frac{(k+1)-1}{(k+1)!}=\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}$. Имеем

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{n-1}{n!}=\left(1-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+$$
$$+\ldots+\left(\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}\right)=1-\frac{1}{n!}.$$

В. В. Произволов

М810*. *Докажите, что в любой выпуклый многоугольник М можно поместить прямоугольник, площадь которого не меньше 1/4 площади многоугольника М.*



Пусть A и B — наиболее удаленные друг от друга вершины многоугольника M, $|AB|=d$ (отрезок AB может быть диагональю или стороной). Возьмем на отрезке AB точку на расстоянии x от A $(0\leqslant x\leqslant d)$ и проведем через нее прямую перпендикулярно AB. Поскольку многоугольник M выпуклый, эта прямая пересечется с ним по отрезку (возможно, вырождающемуся в точку), длину которого обозначим $l(x)$. Пусть CD — наибольший из таких отрезков, $|CD|=l_0$ (см. рисунок). Ясно, что

$$S(M)=\int_0^d l(x)\,dx\leqslant\int_0^d l_0dx=l_0\cdot d.$$

Рассмотрим четырехугольник $KLPQ$ с вершинами в серединах сторон четырехугольника $ABCD$. Две из его сторон (на рисунке — KL и PQ) являются средними линиями в треугольниках ABC и ABD и потому параллельны AB и равны по длине $d/2$; аналогично, две другие стороны параллельны CD и равны по длине $l_0/2$. Поэтому $KLPQ$ — прямоугольник площади $dl_0/4$ и $S_{KLPQ}\geqslant S(M)/4$.

Остается заметить, что прямоугольник $KLPQ$ содержится в $ACBD$, а $ACBD$ — в M, так как M — выпуклый многоугольник.

Полученная оценка, по-видимому, не является точной. Однако автору не удалось ее улучшить. Возможно, это сделают читатели.

Ф. В. Вайнштейн

Ф818. *Два жестких стержня длины l каждый шарнирно скреплены в точке A (см. рисунок). Стержень BA жестко закреплен в точке B, а точка C стержня AC может скользить без трения по направляющей BC. Стержень BA начинают вращать в плоскости рисунка вокруг точки B с постоянной угловой скоростью ω. Чему будут равны максимальная скорость и ускорение точки C, если в начальный момент стержни вытянуты вдоль направляющей ($\widehat{BAC}=\pi$)?*

Поскольку стержни жесткие, в любой момент времени проекции скоростей точек A и C на направление AC должны быть равны, то есть (см. рисунок)

$$v_A\cos\beta=v_C\cos\alpha.$$

Здесь $v_A=\omega l$ — скорость точки A, v_C — скорость точки C в данный момент времени, $\alpha=\omega t$ — угол, который составляет стержень BA (AC) с направляющей BC в данный момент времени $\left(\alpha<\frac{\pi}{4},\ \beta=\frac{\pi}{2}-2\alpha;\right.$ при $\alpha>\frac{\pi}{4}$ $\left.\beta=2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$. Итак,

$$v_A\sin 2\alpha=v_C\cos\alpha\ \Rightarrow\ v_C=2v_A\sin\alpha=2v_A\sin\omega t,$$

то есть скорость точки C меняется со временем по гармоническому закону. Значение v_C максимально при $\alpha=\frac{\pi}{2}$, то есть когда точка C совпадает с точкой B:

$$v_{C\max}=2v_A=2\omega l.$$

Ускорение точки C в любой момент времени равно

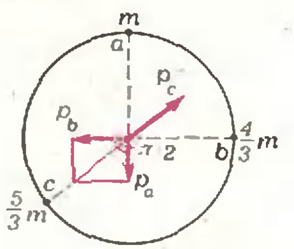
$$a_C=(v_C)'=2v_A\omega\cos\omega t.$$

Значение a_C максимально при $t=0$, то есть в начальный момент времени:

$$a_{C\max}=2v_A\omega=2\omega^2 l.$$

Л. Г. Маркович

Ф819. *Три небольших тела, массы которых относятся как 3:4:5 (масса самого легкого тела равна m), удерживаются в трех различных точках на внутренней поверхности гладкой полусферической чаши радиуса R, которая в нижней точке закреплена на горизонтальной поверхности. В некоторый момент тела отпускают и предоставляют самим себе. Какое максимальное количество тепла может выделиться в такой системе? При каком начальном положении тел это осуществится? Все соударения тел абсолютно неупругие.*



Для того чтобы выделившееся количество тепла было максимальным, необходимо выполнение следующих условий:

1) потенциальная энергия тел в начальный момент должна быть возможно максимальной;

2) тела должны столкнуться одновременно в нижней точке чаши;

3) скорость тел сразу после столкновения должна быть равна нулю.

При выполнении этих условий весь запас начальной потенциальной энергии перейдет в тепло.

Следовательно, тела в начальный момент должны быть расположены на кромке чаши на высоте R над ее нижней точкой. Расположение тел должно быть таким, чтобы их суммарный импульс перед соударением был равен нулю (тогда после соударения слипшееся тело останется неподвижным в нижней точке чаши). Поскольку значения импульсов тел в любой момент времени относятся как 3:4:5, расположение тел в начальный момент должно быть таким, как на рисунке (на рисунке приведен вид сверху). Количество тепла, которое выделится при этом в системе, максимально и равно $4mgR$.

С. К. Строков

Ф820. *Процесс $A-B-C-A$ производят над одним молем идеального одноатомного газа (рис. 1). Определить КПД цикла.*

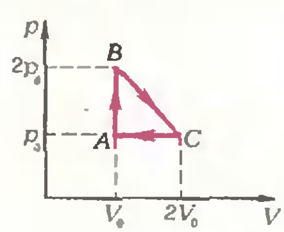


Рис. 1.

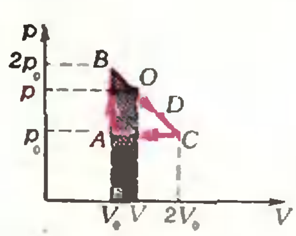


Рис. 2.

КПД цикла η определяется отношением работы A, совершаемой газом за время цикла, к количеству теплоты Q, подведенному к газу за это время:

$$\eta = A/Q.$$

Работа газа численно равна площади треугольника ABC (см. рис. 1):

$$A = p_0V_0/2$$

Чтобы найти Q, рассмотрим каждый участок цикла по отдельности. На участке AB идет изохорный процесс. Газ работы не совершает, а его внутренняя энергия увеличивается на величину

$$\Delta U_{AB} = 3/2R(T_B - T_A) = 3/2p_0V_0.$$

Согласно первому закону термодинамики, это увеличение внутренней энергии происходит за счет подвода некоторого количества теплоты

$$Q_{AB} = \Delta U_{AB} = 3/2p_0V_0.$$

На участке CA идет изобарный процесс, при котором газ сжимается, то есть совершает отрицательную работу, а внутренняя энергия газа уменьшается. Таким образом, на этом участке газ отдает тепло, а не получает.

Выясним теперь, что происходит на участке BC. Здесь газ расширяется и поэтому совершает положительную работу. Внутренняя же энергия газа сначала увеличивается, а потом уменьшается. Следовательно, до некоторого момента газ получает тепло извне, а затем отдает тепло наружу. Обозначим «граничную» точку буквой D и найдем ее параметры. Пусть точка O — текущая точка участка BC (рис. 2) и ее параметры — p, V и T. На отрезке BO газ совершает работу, численно равную площади заштрихованной на рисунке 2 трапеции:

$$A_{BO} = (p_0 + p/2)(V - V_0).$$

при этом его внутренняя энергия изменяется на величину

$$\Delta U_{BO} = 3/2R(T - T_B) = 3/2(pV - 2p_0V_0).$$

Согласно первому закону термодинамики, газу должно быть передано количество теплоты

$$Q_{BO} = A_{BO} + \Delta U_{BO} = (p_0 + p/2)(V - V_0) + 3/2(pV - 2p_0V_0).$$

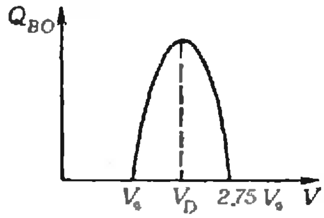


Рис. 3.

Давление и объем на отрезке BO, входящем в отрезок BC, связаны зависимостью

$$p=p_0(3-V/V_0),$$

откуда

$$Q_{BO}=-\frac{p_0}{2}\left(4\frac{V^2}{V_0}-15V+11V_0\right).$$

На рисунке 3 представлен график зависимости $Q_{BO}=Q_{BO}(V)$. Это участок параболы, пересекающей ось V в точках с координатами

$$V_1=V_0 \text{ и } V_2=11/4V_0=2{,}75V_0;$$

вершине параболы отвечает значение объема

$$V=V_D=(V_1+V_2)/2=15/8V_0.$$

Итак, во время процесса BC при изменении объема от V_0 до V_D количество теплоты, переданное газу, монотонно растет, и к моменту, когда точка O совместится с точкой D, газ получит количество теплоты

$$Q_{BD}=49/32p_0V_0.$$

Когда же точка O находится в пределах отрезка DC и приближается к точке C, величина Q_{BO} монотонно убывает. Это означает, что на отрезке DC газ отдает тепло, а не получает.

Таким образом, газ получает тепло на участках AB и BD, поэтому переданное газу за время цикла количество теплоты равно

$$Q=Q_{AB}+Q_{BD}=97/32p_0V_0,$$

и коэффициент полезного действия цикла равен

$$\eta=16/97, \text{ или } \eta\approx16{,}5\%.$$

А. Г. Изергин, Ю. П. Малышев, В. Р. Саулин

Ф821. *В схеме, приведенной на рисунке, трансформатор идеальный. Параметры схемы указаны на рисунке. Найти амплитуду тока и сдвиг фаз в первичной цепи.*

◆

Напряжения обмоток трансформатора связаны соотношением

$$\frac{U_1}{U_2}=\frac{n_1}{n_2}.$$

Поскольку трансформатор идеальный, мгновенная мощность во вторичной цепи равна мощности первичной. Значит, токи обмоток связаны соотношением

$$\frac{I_1}{I_2}=\frac{n_2}{n_1}.$$

Ток I_2 и напряжение U_2 сдвинуты по фазе на $\frac{\pi}{2}$: такой же сдвиг будет и между I_1 и U_1. Отсюда видно, что трансформатор с подключенным к нему конденсатором емкости C можно заменить конденсатором, емкость которого равна

$$C_1=C\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2=4\cdot10^{-6}\text{ Ф}.$$

После такого преобразования наша схема представляет собой обычную цепь, содержащую сопротивление R и емкость C_1. Амплитуда тока в цепи равна

$$I=\frac{U}{\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{2\pi\nu C_1}\right)^2}}=\frac{U}{\sqrt{R^2+\frac{n_1^4}{4\pi^2\nu^2n_2^4C^2}}}\approx0{,}17\text{ А}.$$

Сдвиг фаз —

$$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{R}{1/2\pi\nu C_1}=\operatorname{arctg}\left(2\pi\nu\frac{n_2^2}{n_1^2}RC\right)\approx0{,}9\text{ рад}.$$

Р. З. Александров

Ф822. *Ваш собеседник, с которым вы сидите друг напротив друга, носит очки. Сможете ли вы определить, каким дефектом зрения — близорукостью или дальнозоркостью — он обладает? (Естественно, вы не станете просить собеседника дать примерить его очки и не будете заводить о них разговор).*

У близорукого человека оптическая сила глаз больше нормальной, а у дальнозоркого — меньше. Поэтому при близорукости носят очки с рассеивающими линзами, а при дальнозоркости — с собирающими.

В принципе об оптической силе очков можно было бы судить по изменению видимого размера глаз собеседника за стеклами: за рассеивающими линзами глаза кажутся меньше их истинной величины, а за собирающими — больше. Однако, если оптическая сила очков невелика или если вы не видели своего собеседника без очков, то данный способ непригоден.

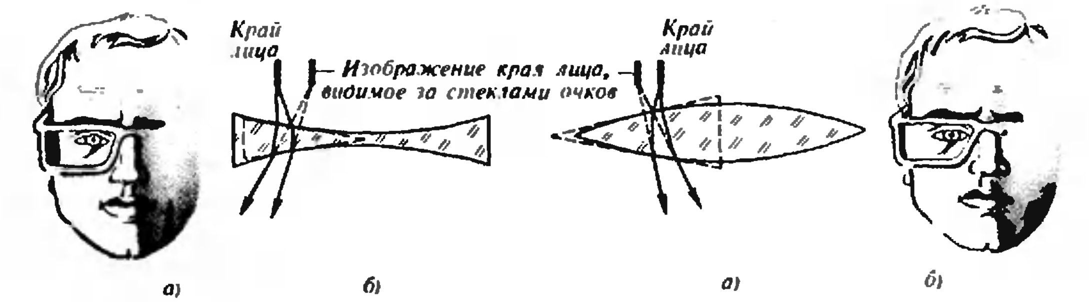


Рис. 1. Рис. 2.

Проще всего ответить на вопрос задачи, наблюдая за смещением видимого за стеклами очков края лица по отношению к частям лица, не прикрытым очками: у близорукого человека — внутрь (рис. 1, *а*), а у дальнозоркого — наружу (рис. 2, *б*). Край стекла очков можно представить как призму, отклоняющую лучи. На рисунках 1, *б* и 2, *а* показан ход лучей, падающих на край, соответственно, рассеивающей и собирающей линз.

М. В. Семенов

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М776—М790 и Ф788—Ф802, справились с задачами М776, М781, М782, М784, М786—М788 и Ф791, Ф794, Ф798—Ф800. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

А. Астрелин (Новосибирск) 83, 85, 89; *А. Ахвледиани* (Тбилиси) 85; *Я. Бабкин* (Петрозаводск) 89; *В. Базуев* (Москва) 89; *Л. Байрак* (Белгород) 78; *В. Барзыкин* (п. Черноголовка Московской обл.) 77; *Ю. Баркаган* (Пенза) 79; *В. Белов* (Новосибирск) 89; *М. Бенце* (Сацеле, СРР) 79; *А. Беренштейн* (Москва) 79; *А. Биргер* (Иваново) 77, 79; *И. Богуславский* (Москва) 77, 79; *В. Булавас* (Паневежис) 77, 83, 85; *И. Вайнштейн* (Калинин) 79; *Э. Велиметов* (Баку) 89; *А. Гаджимагомедов* (с. Новый Фриг Даг. АССР) 89; *М. Гараев* (Физули) 77, 79, 85; *О. Гарифуллин* (Пенза) 79; *Р. Гафициану* (Плоешти, СРР) 89; *Р. Гендлер* (Ташкент) 77, 89; *Н. Джурелов* (Ямбол, НРБ) 0; *О. Ерошкин* (Днепропетровск) 77, 78, 83, 85, 89, 90; *Д. Земляной* (Севастополь) 79, 83; *Л. Зосин* (Киев) 89; *М. Йотов* (София, НРБ) 83, 89; *Д. Каледин* (Москва) 80, 83, 85; *Н. Карпенко* (Ленинград) 83, 89; *А. Карпович* (Киев) 77, 79, 83, 85, 89; *А. Карташев* (Витебск) 77; *З. Касенов* (Силистра, НРБ) 79; *М. Кваша* (Москва) 89; *А. Корнилов* (Ростов-на-Дону) 77, 79, 83, 89; *С. Корокчеев* (Севастополь) 83; *С. Корщунов* (Целиноград) 89; *А. Костюк* (Бердичев) 89; *Л. Котыченко* (Рудный) 89; *В. Кудряшов* (Пенза) 79; *А. Кучкаров* (Ургенч) 89; *А. Лазарев* (Москва) 89; *О. Леонтьева* (Ленинград) 79; *Г. Лось* (Хмельницкий) 79; *К. Макарчук* (Киев) 89; *Е. Малеванец* (Киев) 89; *М. Маринов* (Ямбол, НРБ) 77, 79, 80; *О. Матвеев* (Свердловск) 90; *Р. Мисявичюс* (д. Повилаускай Лит. ССР) 83, 85; *В. Михайлюк* (Киев) 89; *И. Мишинев* (Ямбол, НРБ) 77, 79, 80, 89; *Ф. Назаров* (Ленинград) 77, 79, 83, 85; *С. Найден* (Днепропетровск) 85; *М. Натальченко* (Алма-Ата) 83; *Д. Незнаков* (Ямбол, НРБ) 79, 80; *И. Нестеров* (Пскент) 79; *В. Николаев* (Хабаровск) 89; *А. Никольцев* (Севастополь) 77; *О. Овецкая* (Донецк) 89; *Л. Оридорога* (Донецк) 77; *М. Осипова* (Владивосток) 89; *С. Пиунихин* (Москва) 89; *А. Пустовой* (Кишинев) 89; *К. Родзин* (Донецк) 77; *Ю. Руденко* (Киев) 89; *И. Святодух* (Красноармейск Донецкой обл.) 89; *Ф. Серженко* (Запорожье) 83, 89; *Г. Сигалов* (Ростов-на-Дону) 89; *А. Сидорович* (Шяуляй) 89; *С. Струков* (Воронеж) 77—79, 83, 85, 89, 90; *Ю. Таранников* (Новосибирск) 89; *М. Тейтель* (Киев) 89; *И. Терещак* (Стражке, ЧССР) 79, 80, 83, 85; *С. Токарь* (Яготин) 83, 89; *Г. Трунов* (Москва) 89; *Н. Федин* (Омск) 78; *Д. Федотов* (Новокузнецк) 83, 89; Б. Фридман (Москва) 83, 85, 89; *К. Хлебаров* (Ямбол, НРБ) 77, 79, 80; *М. Холмянский* (Москва) 89; *В. Хрычиков* (Севастополь) 77—79, 83; *С. Чернышев* (Александров) 83, 85, 89; *В. Шаптала* (Днепропетровск) 79; *Л. Эрдеш* (Будапешт, ВНР) 77, 80, 83, 85, 89, 90; *П. Эингоф* (Киев) 77, 79, 83, 85, 90; *А. Юдаев* (Москва) 83.

Физика

А. Абанов (Красноярск) 90, 93, 95, 97, 01, 02; *Е. Авдеев* (Бор) 93, 96; *С. Андреев* (Москва) 01, 02; *В. Апальков* (Харьков) 93, 95—97, 01, 02; *Т. Аширмамедов* (Новосибирск) 01, 02; *Б. Бабаев* (Баку) 95; *Э. Багдасарян* (Баку) 93, 01; *Л. Байрак* (Белгород) 93, 01; *А. Барабаш* (Киев) 96; *Н. Барановская* (Винница) 89; *В. Барзыкин* (п. Черноголовка Московской обл.) 88—90, 93, 96, 97, 01, 02; *А. Барчунов* (Алма-Ата) 01, 02; *Е. Бельтюкова* (Белорецк) 96; *А. Беренштейн* (Москва) 01, 02; *И. Берхим* (Донецк) 88, 90, 93—97, 02; *Е. Беспалов* (Курган) 90, 02; *А. Билюков* (Мытищи) 00; *М. Бияк* (Краснодар) 01; *О. Богучаров* (Тула) 88—90; *С. Бойко* (Винница) 01; *В. Бражников* (Запорожье) 93, 97, 01, 02; *А. Брезгунов* (Новосибирск) 96, 97; *В. Булавас* (Паневежис) 88; *Г. Буламбаев* (Алма-Ата) 01; *Н. Бурдейная* (Винница) 93, 02; *И. Бушуев* (Кемерово) 88, 90, 93, 95, 96; *О. Важаевский* (Москва) 88, 90, 93, 95—97, 01, 02; *Б. Вайсман* (Куйбышев) 95; *Т. Валиахметов* (Челябинск) 92; *В. Вангелов* (Бургас, НРБ) 88, 90, 93, 96, 01; *В. Викторов* (Рязань) 93, 96; *М. Вислая* (Донецк) 93, 95—97; *А. Выродов* (Осинники) 90, 96, 97, 02; *Д. Выдрин* (Златоуст) 97; *Е. Гисич* (Винница) 89; *О. Гаврилов* (Киев) 02; *В. Глаголев* (Тула) 93; *О. Голинский* (Тамбов) 90, 93, 01, 02; *Ю. Гордиенко* (Винница) 96, 01, 02; *Э. Горячковский* (Кишинев) 90; *А. Грабчак* (с. Ободовка Винницкой обл.) 96; *С. Гребенщиков*)п. Черноголовка Московской обл.) 90, 93, 96, 97, 01, 02; *М. Гринберг* (Красноярск) 01; *О. Гришин* (Тула) 90; *А. Данейко* (Минск) 93, 95, 96, 01, 02; *Г. Данелия* (Тбилиси) 90, 01, 02; *Л. Демидова* (Винница) 01, 02; *В. Дерендяев* (Березники) 89, 90, 92, 95, 97, 02; *В. Димов* (Бургас, НРБ) 88, 90; *Г. Долгопятов* (Донецк) 93, 95—97, 01, 02; *Л. Доросинский* (п. Черноголовка Московской обл.) 88, 90, 92; *М. Дурдин* (Иваново) 93, 96; *А. Ежов* (Ленинград) 02; *А. Ефимов* (Москва) 93, 97; *А. Ефремов* (Воронеж) 88, 90, 93, 97, 02; *В. Житомирский* (Харьков) 88, 89, 93, 95—97, 01, 02; *Н. Жохов* (Александров) 93, 95—97, 01, 02; *Г. Жуков* (Куйбышев) 02; *Р. Жямайтис* (Вильнюс) 90, 92, 93, 96, 97, 02; *Б. Задбинов* (Лида) 93; *А. Зайцев* (Целиноград) 90, 01, 02; *Д. Зайцев* (Горький) 88—90, 92; *А. Зеленюк* (Здолбунов) 93, 95; *М. Зиманов* (Алма-Ата) 88, 90, 02; *С. Зинченко* (Краматорск) 02; *Т. Иваненко* (Киев) 95, 02; *Э. Иванов* (Орджоникидзе) 95; *М. Имас* (Донецк) 95, 96, 01; *Л. Йосыпив* (Ивано-Франковская обл.) 90; *С. Казарян* (Ереван) 93, 96, 97; *Д. Калатози* (Кутаиси) 97, 01; *Д. Каледин* (Москва) 88, 89, 92, 93, 96, 02; *И. Калиновский* (Киев) 93, 96, 02; *Д. Каменецкий* (Москва) 90; *Е. Канцыпер* (Таллин) 96, 97; *В. Каральник* (Алма-Ата) 93; *А. Карнаухов* (Ижевск) 93, 96, 02; *С. Карнаухова* (Свердловск) 93; *А. Карпович* (Киев) 95; *С. Кастелли* (Болград) 88—90, 93, 95, 96; *В. Кашин* (Москва) 97; *Е. Кичковская* (Винница) 02; *Ю. Кившарь* (Харьков) 93, 96, 97, 01, 02; *А. Кириченко* (Пермь) 01, 02; *А. Климачев* (Минск) 93, 95; *А. Клишин* (Киев) 02; *М. Кныш* (Краснодар) 02; *М. Коваль* (Киев) 90, 93; *Ю. Коваль* (Киев) 93; *Э. Ковнацкий* (Червоноград) 88, 93; *М. Козлов* (Москва) 95, 97; *Е. Козулин* (Пермь) 97; *В. Коломиец* (Днепропетровск) 90; *А. Коломейский* (Винница) 93, 96; *В. Комов* (Александров) 88, 90, 92, 93, 96, 97; *С. Коняшкин* (Брянск) 93, 01; *Е. Корнилова* (Ефремов) 88, 01, 02; *А. Корчагин* (Красноармейск Московской обл.) 88—90, 92; *А. Коршак* (Киев) 02; *И. Коршун* (Коммунарск) 01, 02; *Н. Косматов* (Москва) 90; *А. Котляр* (Минск) 93, 01, 02; *А. Кравцов* (Москва) 93, 95—97, 01, 02; *Д. Кравчук* (Киев) 97; *С. Кравчук* (Москва) 90; *А. Крапивин* (Киев) 01, 02; *А. Краснов* (Ташкент) 93, 01, 02; *О. Краснояров* (Грозный) 93, 01, 02; *В. Кретив* (Винница) 00; *В. Криман* (Винница) 88, 89; *А. Кругов* (Киев) 02; *Е. Крылов* (Ленинград) 90; *И. Крылов* (Куйбышев) 01, 02; *С. Крылова* (Пущино) 99; *В. Кубатин* (Ленинград) 88, 90; *В. Кудашов* (п. Вуктыл Коми АССР) 88, 90, 02; *Д. Кузютин* (Алма-Ата) 93, 01, 02; *М. Кулдашева* (Учкурган) 02; *С. Кулев* (Москва) 02; *А. Кулишин* (Киев) 02; *Д. Купцов* (Москва) 88, 90, 92, 93, 95, 97, 02; *П. Курганидзе* (Кутаиси) 90; *Н. Кухаркин* (Москва) 88—90, 93, 96, 97, 02; *Д. Лабадзе* (Тбилиси) 96; *Г. Ландсберг* (Серпухов) 90; *А. Лапатанов* (Винница) 01; *С. Лауриновичюс* (Мажейкяй) 01, 02; *И. Левин* (Донецк) 93, 95—97, 02; *А. Лихачев* (Барнаул) 02; *И. Лорман* (Киев) 88—90, 96, 97; *Д. Лунц* (Саратов) 95, 01, 02; *В. Лыткин* (Чита) 01; *К. Макагон* (Запорожье) 88, 90; *Д. Макаров* (п. Черноголовка Московской обл.) 88—90, 92, 93, 96, 97, 01, 02; *К. Макарчук* (Киев) 93, 95, 02; *А. Малай* (Каушаны) 88, 90, 93, 96, 02; *Д. Малугашвили* (Тбилиси) 02; *И. Мамедов* (Баку) 93, 95, 01, 02; *Е. Мамчиц* (Днепропетровск) 01, 02; *Л. Маркович* (Минск) 88—90, 93, 95, 02; *О. Мароо* (Канев) 01, 02; *А. Мартющенко* (Днепропетровск) 02; *В. Марущак* (Краматорск) 93, 96; *П. Милютин* (Хабаровск) 88, 90; *В. Михайлов* (Братск) 90, 01; *А. Михеев* (Златоуст) 88, 93, 02; *К. Мишин* (Днепропетровск) 88, 90, 93, 96; *П. Молодчик* (Киев) 93; *С. Молчанов* (Саратов) 01, 02; *С. Мусаев* (Баку) 88, 90; *Д. Набишев* (Фергана) 88, 90, 93, 96, 01; *Д. Набутовский* (Новосибирск) 88—90, 92; *Ш. Насыров* (с. Кульмач Красноводской обл.) 88; *В. Никитин* (Одесса) 90; *С. Никольский* (Иркутск) 02; *С. Никоненко* (Киев) 93; *А. Носков* (Москва) 93, 96, 97; *Р. Овчарек* (Варшава, ПНР) 88; *О. Овчинский* (Запорожье) 88, 90, 93, 96; *О. Огнев* (Новосибирск) 88; *С. Орлов* (Зеленоград) 88, 90; *В. Осипов* (Гайсин) 93; *К. Оспанов* (Чимкентская обл.) 02; *О. Оцвера* (Винница)

02; *А. Павельев* (Фрязино) **88, 90, 95, 96, 02;** *Д. Павловский* (Ташкент) **93;** *А. Панасенко* (Новосибирск) **90;** *Е. Пархоменко* (Чернигов) **90, 01, 02;** *К. Первушин* (Ташкент) **93, 95, 96;** *О. Петренко* (Кировское) **01;** *Д. Петунин* (Кзыл-Ординская обл.) **93, 96;** *И. Пильников* (Тамбов) **88, 90, 93, 95, 96, 01;** *А. Погорелов* (Алма-Ата) **88—90, 93, 02;** *Р. Погосян* (Баку) **00;** *Ш. Поладов* (с. Гиль Аз. ССР) **90;** *А. Просвиров* (Волгоград) **90;** *И. Прудников* (Москва) **97;** *М. Пустильник* (Свердловск) **93, 95—97, 01, 02;** *С. Рекун* (Винница) **02;** *А. Розенвайн* (Киев) **93, 96, 97;** *М. Романенко* (Владимир) **01, 02;** *С. Рудаков* (Фергана) **97;** *Д. Русинов* (Ленинград) **88, 90, 95, 01;** *И. Савыков* (Первоуральск) **90, 93, 96, 97, 01, 02;** *А. Садыков* (п. Черский Як. АССР) **88, 93, 96, 97, 02;** *Г. Самадашвили* (Тбилиси) **88, 90, 93, 01, 02;** *В. Самойленко* (Находка) **88, 90;** *А. Самойлович* (Донецк) **93, 95—97;** *М. Самсонов* (Ленинград) **90, 95, 01;** *С. Сахарук* (Брест) **90;** *В. Свинорчук* (с. Садки Тернопольской обл.) **02;** *В. Семененко* (Киев) **90, 93, 96;** *Ф. Серженко* (Запорожье) **88, 93, 95—97, 02;** *Н. Серяков* (п. Малаховка Московской обл.) **93;** *А. Сидорович* (Шяуляй) **93, 96;** *С. Симонов* (Долгопрудный) **88, 90, 93, 95—97, 01, 02;** *А. Симонов* (Улан-Удэ) **90;** *К. Скляров* (Севастополь) **01, 02;** *М. Скорик* (Киев) **88, 90, 93, 95—97;** *А. Соловьев* (Куйбышев) **93, 95, 97, 01, 02;** *Д. Соловьев* (Фрязино) **93, 96, 97, 01, 02;** *В. Срюбас* (Алитус) **01;** *Е. Стародубцев* (п. Фоминополь Минской обл.) **93;** *И. Стомахин* (Москва) **90, 93, 95;** *Н. Сторожук* (Курск) **90, 02;** *А. Сурков* (Ленинград) **88, 90;** *И. Тетко* (Кодыма) **96, 01, 02;** *В. Томчук* (Винница) **01, 02;** *Д. Третьяков* (Винница) **89, 93, 96, 97, 01, 02;** *И. Тухватуллин* (п. Лопатино Московской обл.) **93;** *О. Фатьянов* (Курск) **88—90, 92;** *Н. Федин* (Омск) **90, 92, 93, 96;** *В. Фельдман* (Саратов) **88—90, 92, 93, 95, 96, 02;** *Л. Фельдман* (Саратов) **88—90, 92, 93, 95—97, 02;** *Б. Хайкович* (Ленинград) **93;** *А. Хомяков* (Белорецк) **90;** *Д. Худяков* (Первоуральск) **02;** *А. Черепнин* (Винница) **01;** *В. Черных* (Хабаровск) **93, 95;** *О. Чернышев* (Тольятти) **93, 95, 01, 02;** *И. Чечеткин* (Киев) **93, 96, 01, 02;** *А. Чудновский* (Киев) **90, 92, 93, 96, 97, 02;** *А. Шнирман* (Донецк) **95—97, 02;** *И. Шойхет* (Ташкент) **90;** *В. Шядуйкис* (Зарасай) **90;** *Ю. Щербаков* (Запорожье) **88, 90, 93, 97;** *И. Эльберт* (Киев) **01, 02;** *Н. Эрхарт* (Биловец, ЧССР) **88, 90;** *О. Юдин* (Ленинград) **90;** *Г. Яшин* (п. Черноголовка Московской обл.) **90, 93, 96, 01, 02.**

Наша обложка

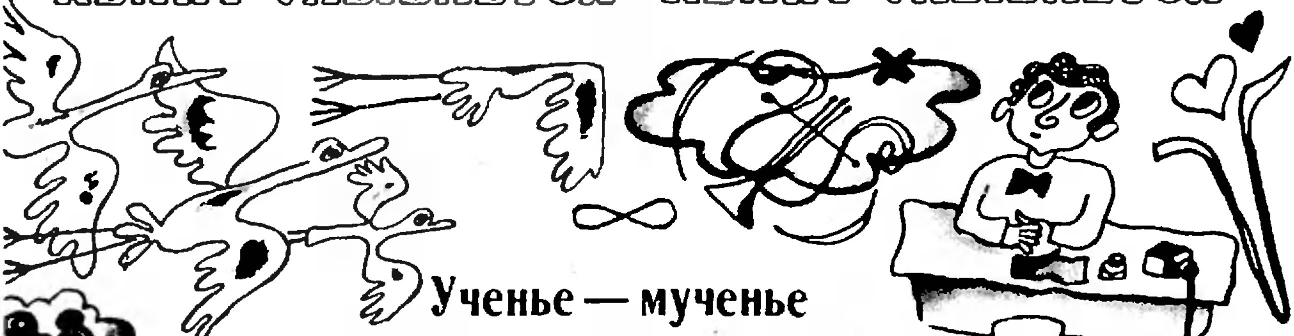
На первой странице обложки вы видите фотографию гипсовой модели поверхности третьего порядка (*кубической поверхности*) — поверхности, заданной многочленом третьей степени от трех переменных. На ней отчетливо видны 27 прямых, целиком на ней лежащих.

Теорема, утверждающая, что в общем случае на любой кубической поверхности обязательно имеется ровно 27 прямых (если считать также «мнимые» и «бесконечно удаленные» прямые), появится на одной из «Геометрических страничек», которые со следующего номера будут регулярно печататься в «Кванте». На каждой такой страничке, кроме чертежа с объяснениями, будут задания — графические и математические. Геометрические странички могут украсить математический кабинет школы или, обогащенные самостоятельными графическими и математическими работами учащихся, появляться в школьной стенгазете.

В свое время теорема о 27 прямых была крупной математической сенсацией. Вот что написал об этом в своей книге английский математик А. Гендерсон: «В 1849 году Кейли и Сальмон открыли 27 прямых. В 1869 году Христиан Винер изготовил модель кубической поверхности, показывающую 27 действительных прямых на ней. Выдающийся геометр Сильвестер счел, что работа Винера принадлежит к числу открытий «на вечные времена вписавших 1869 год в Анналы Науки». На Всемирной выставке 1894 года в Чикаго Клейн демонстрировал полный набор кубических поверхностей, в том числе поверхность Х. Винера.»

С тех пор шума вокруг сенсации поубавилось, прошла и мода на гипсовые поверхности — сфотографированный нами экземпляр теперь считается уникальным (он хранится на кафедре дифференциальной геометрии механико - математического факультета МГУ). Как писал уже в наши дни советский математик Ю. И. Манин, «книга Гендерсона вышла в 1911 году, когда красноречие Сильвестра и гипсовые модели уходили вместе с викторианской эпохой».

Но красота открытых в эту эпоху 27 прямых — непреходящая.



Ученье — мученье

Говорят: нет ученья без мученья, математика — не исключенье. По-видимому, больше всех мучаются поэты. А может, у них просто больше таланта про свои мучения рассказывать.

Никак не мог справиться с простенькими арифметическими задачами Е. Винокуров:

Я чуть не плакал. Не было удачи!
Задача не решалась — хоть убей.
Условье было трудным у задачи.
Дано:
«Летела стая лебедей...»
Я, щеку грустно подперев рукою,
Делил, слагал — не шли дела на лад!
Но, лишь глаза усталые закрою,
Я видел ясно:
вот они — летят...

Не меньший ужас вызывают школьные задачи у И. Снеговой:

Математика — это трудно.
Это дар. С первых лет. От бога.
Слишком промахи в ней подсудны,
Слишком взыскивает с итога.
Уравненья, в которых скопом
Корни, степень, неравенств бездна.
Суть, замкнувшаяся по скобкам,
И — до дьявола неизвестных.
Или дроби... Ох эти дроби!
Жизнь, как дробь, и точна, а — мимо.
В ней делитель упрям и злобен,
А делимое — неделимо.
Темь задач! Легкость прегрешений,
Груз просчетов... Но зло не в этом:
Ни одно из моих решений
Не сходилось вовек с ответом.

Не очень большая, но явная обида сохранилась у Н. Глазкова на школьных учителей:

Я мог бы это доказать,
Да мне не дали досказать.

Намаялся с геометрией и тригонометрией А. Поперечный:

Я постигал с трудом
Неясный смысл
Великих чисел и простых затей.
Но часто
Над руками коромысел
Мне снился треугольник журавлей.
И, сложные фигуры начертая,
Зубря тригонометрию
В зарю,
Я говорил себе:
А на черта я
Ее, тригонометрию, зубрю?!
И, презирая точные науки
(В них коренное коренилось зло),
Я корень извлекал,
Идя на муки,
Не извлекая истины зерно.
Я рисовал квадраты дальних окон,
В них силуэт знакомый различал,
Но Пифагор недремлющее око
Вперил в меня и ярость излучал.
«Пифагоровы штаны
На все стороны равны.»
Так я тихо напевал
И врага в нем наживал.

Явно излишнее почтение к школьной программе демонстрирует Б. Слуцкий:

...интересно
Наблюдать, как, словно пена,
Опадают наши рифмы
И величие степенно
Отступает в логарифмы.

А некоторые поэты даже — страшно сказать! — арифметики не знают. Цепенеет перед простейшей цифрой Б. Окуджава:

Магическое «два». Его высоты,
его глубины... Как мне превозмочь?

Не решается пойти дальше таблицы умножения Ю. Мориц:

Пятью пять двадцать пять,
Дважды два четыре.

Еще скромнее О. Мандельштам:

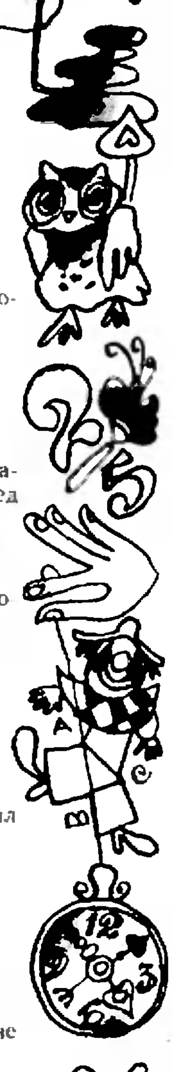
Дважды два — четыре,
Два да три — пять.
Вот и все, что мы можем,
Что мы можем знать.

И уж, наверное, все рекорды побил И. Эренбург:

Я не знал, что дважды два — четыре.
И учитель двойку мне поставил...
Правила менялись, только бойко,
С той же снисходительной улыбкой
Неизменно ставили мне двойку
За допущенную вновь ошибку.
Не был я учеником примерным...

После таких откровений поэтов нельзя не пожалеть, а в чем-то и простить.

Э. П. Казанджан



Характерные ошибки на экзаменах по физике

Кандидат физико-математических наук
Л. В. ТАРАСОВ,
А. Н. ТАРАСОВА

Из огромного количества вопросов, предлагаемых на вступительных экзаменах по физике в различных вузах, можно выделить вопросы довольно сложные и совсем простые. Неудивительно, когда неправильные ответы даются на сложные вопросы. Но, как показывает практика, ошибиться можно и при ответе на самый простой вопрос, если не очень задумываться над правильным применением физических понятий и законов. Более того, есть вопросы, на которые абитуриенты из года в год дают неправильные ответы. Ниже приводятся примеры подобных вопросов вместе с характерными неправильными ответами и анализом типичных ошибок.

Вопрос 1. В некоторый момент времени скорость тела равна нулю. Можно ли утверждать, что ускорение в этот момент тоже равно нулю?

Характерный неправильный ответ. Да, можно.

Анализ ошибки. Ускорение в любой момент времени определяется не скоростью, а быстротой ее изменения в этот момент. Поэтому из того факта, что скорость обратилась в нуль, вовсе не следует, что ускорение тоже должно обратиться в нуль. Простой пример: скорость брошенного вертикально вверх тела в самой верхней точке траектории полета равна нулю, ускорение же в этой точке равно (как, впрочем, и во всех других точках траектории) ускорению свободного падения g. Другой пример: когда любой транспорт трогается с места, его начальная скорость равна нулю, а ускорение отлично от нуля.

Вопрос 2. Два тела с разными массами подняли на одинаковые высоты над полом и одновременно отпустили. Одновременно ли они упадут на пол, если сила сопротивления воздуха для обоих тел одна и та же и с течением времени не изменяется?

Характерный неправильный ответ. Тела упадут на пол одновременно, поскольку для обоих тел сила сопротивления воздуха одна и та же и ее можно не принимать во внимание.

Анализ ошибки. Пусть F_c — сила сопротивления воздуха, m — масса тела, g — ускорение свободного падения, $F_т = mg$ — сила тяжести, a — ускорение падающего тела (здесь и далее под словами «сила» и «ускорение» мы будем иметь в виду «модуль силы» и «модуль ускорения»). Записав второй закон Ньютона

$$F_т - F_c = ma,$$

находим

$$a = (F_т - F_c)/m = g - (F_c/m).$$

Отсюда следует, что тело с большей массой будет иметь большее ускорение и, следовательно, скорее достигнет пола. Тела упали бы одновременно лишь в том случае, если бы сила сопротивления воздуха равнялась нулю.

Вопрос 3. Тело брошено под углом к горизонту. Какие силы действуют на летящее тело? Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

Характерный неправильный ответ. На тело действуют две силы: сила тяжести (направленная вертикально вверх) и сила бросания (направленная по касательной к траектории).

Анализ ошибки. На летящее тело действует только одна сила — сила тяжести (коль скоро мы пренебрегаем сопротивлением воздуха). Никакой «силы бросания» в данном случае нет. Как показывает практика, указанная ошибка очень распространена. По-видимому, это связано с двумя обстоятельствами.

Во-первых, не все экзаменующиеся достаточно твердо усвоили тот факт, что сила возникает лишь при взаимодействии тел. Летящее тело взаимодействует только с Землей, и на него действует только сила притяжения к Земле. Конечно, когда тело бросали, к нему прикладывали некоторую силу (ее можно было бы назвать силой бросания). Однако мы рассматриваем тело не во время бросания, а уже после того, как его бросили, то есть во время полета. Важно понимать, что силу нельзя «накопить»: есть взаимодействие тел — есть соответствующая сила, кончилось взаимодействие — сила тут же исчезла.

Во-вторых, довольно распространено заблуждение, будто характер и траектория движения тела определяются только действующими на него силами. В действительности же силой обусловлено ускорение тела, то есть изменение скорости. Сама же скорость в каждый момент времени определяется двумя факторами — изменением скорости и начальной скоростью. Иначе говоря, характер движения тела зависит не только от действующих на тело сил, но и от начальных условий. Во всех задачах механики начальные условия — это начальная координата и начальная скорость тела. В данном случае под начальными условиями следует понимать угол, под которым брошено тело, и модуль скорости, с какой оно было брошено.

Вопрос 4. Тело (камень на веревке) совершает движение по окружности в вертикальной плоскости. Какие силы действуют на тело? Как они направлены в тот момент, когда тело оказывается в точке A траектории (рис. 1, *а*)?

Характерный неправильный ответ. На тело действуют три силы: сила тяжести $\vec{F}_т$, сила упругости веревки $\vec{N}$ и центростремительная сила $\vec{F}$, удерживающая тело на окружности (рис. 1, *б*).

Анализ ошибки. Рассматриваемое тело взаимодействует с Землей (результат — сила тяжести $\vec{F}_т$) и с веревкой (результат — сила упругости веревки $\vec{N}$). Таким образом, на тело действуют лишь две силы. Сила же, удерживающая тело на окружности и сообщающая ему центростремительное ускорение $a_ц$, есть сумма проекций указанных сил на направление радиуса (рис. 1, *в*):

$$ma_ц = N - F_т \cos \alpha.$$

Эти же силы, точнее — сумма проекций этих сил на направление касательной к окружности, сообщают телу и касательное ускорение $a_к$:

$$ma_к = F_т \sin \alpha.$$

Вопрос 5. Находящийся на горизонтальной плоскости ящик с песком массой M начинает двигаться поступательно после того, как в него попадает пуля массой m, летевшая горизонтально со скоростью v_0. Найти скорость ящика. Трением ящика о плоскость можно пренебречь.

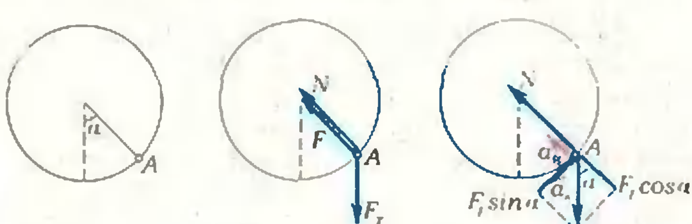
Характерный неправильный ответ. Поскольку трение не учитывается, кинетическая энергия ящика вместе с застрявшей в нем пулей равна первоначальной кинетической энергии пули:

$$(M+m)v^2/2 = mv_0^2/2.$$

Следовательно,

$$v = v_0\sqrt{m/(M+m)}.$$

Анализ ошибки. При попадании пули в ящик часть ее первоначальной кинетической энергии превращается в тепло; поэтому $(M+m)v^2/2 < mv_0^2/2$. Чтобы найти скорость ящика, надо воспользоваться законом сохранения импульса



а) б) в)

Рис. 1.

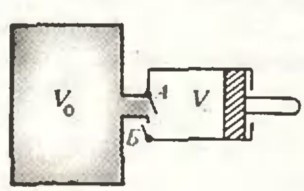


Рис. 2.

(количества движения)

$$(M+m)v=mv_0,$$

откуда

$$v=v_0m/(M+m).$$

Вопрос 6. Способствует ли повышению уровня воды в реке таяние льдин, плывущих по реке во время ледохода?

Характерный неправильный ответ. Да, способствует.

Анализ ошибки. Когда льдина плавает в воде, ее сила тяжести уравновешена архимедовой силой, равной силе тяжести воды в объеме, вытесняемом льдиной. После того как льдина растает, она превратится в воду, объем которой в точности равен объему подводной части льдины. Отсюда следует, что при таянии льдин уровень воды в реке не изменяется.

Вопрос 7. Газ, находящийся в сосуде объемом V_0 при давлении p_0, откачивают поршневым насосом, имеющим рабочую камеру объемом V (рис. 2). Какое число ходов поршня надо сделать, чтобы давление газа в сосуде понизилось до значения p?

Характерный неправильный ответ. Пусть искомое число ходов есть n. Учитывая, что объем газа увеличился на nV, а температура газа осталась неизменной, в соответствии с законом Бойля — Мариотта получаем

$$p_0V_0=p(V_0+nV).$$

Отсюда и находим n.

Анализ ошибки. Закон Бойля — Мариотта справедлив только тогда, когда не только температура, но и масса газа остаются неизменными. В данном же случае после каждого хода поршня часть газа уходит из системы; когда поршень движется справа налево, он закрывает клапан *А* и открывает клапан *Б*, через который газ и покидает систему (см. рис. 2). Поэтому надо рассматривать каждый из ходов поршня по отдельности. Начнем с первого хода. Для массы газа, находившейся в сосуде первоначально, запишем закон Бойля — Мариотта:

$$p_0V_0=p_1(V_0+V),$$

где p_1 — давление газа, когда поршень занимает крайнее правое положение. Когда поршень возвращается в исходное левое положение, в сосуде остается масса газа, меньшая по сравнению с исходной, но ее давление есть p_1. Для этой массы газа

$$p_1V_0=p_2(V_0+V),$$

где p_2 — давление газа по окончании рабочего хода поршня. Рассматривая последовательно n ходов поршня, получим систему n уравнений:

$$\begin{cases} p_0V_0=p_1(V_0+V), \\ p_1V_0=p_2(V_0+V), \\ p_2V_0=p_3(V_0+V), \\ \cdots\cdots\cdots \\ p_{n-1}V_0=p(V_0+V); \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем

$$p=p_0(V_0/(V_0+V))^n,$$

откуда

$$n=\log_{V_0/(V_0+V)}(p/p_0).$$

Вопрос 8. Что покажет вольтметр в схеме на рисунке 3 (см. с. 56)? Сопротивление вольтметра считать бесконечно большим, а сопротивлением соединительных проводов можно пренебречь.

Характерный неправильный ответ. Вольтметр покажет ЭДС элемента: $U=\mathcal{E}$.

Анализ ошибки. В цепи $ABCD$ (см. рис. 3) течет ток

$$I=2\mathcal{E}/(2r)=\mathcal{E}/r,$$

где r — внутреннее сопротивление каждого элемента. Вольтметр, подсоединенный к зажимам элемента, показывает напряжение

$$U=\mathcal{E}-Ir=\mathcal{E}-(\mathcal{E}/r)r=\mathcal{E}-\mathcal{E}=0.$$

Вопрос 9. Вы щелкаете выключателем, и... лампочка вдруг перегорает. Чем это объясняется?

Характерный неправильный ответ. Вследствие явления самоиндукции при отключении от сети возникает дополнительный ток (ток размыкания) того же направления, что и основной ток. В результате полный ток через лампочку резко возрастает, и лампочка может перегореть.

Анализ ошибки. Как показывает практика, лампочка перегорает отнюдь не при выключении, а, напротив, при включении. Ясно, что явление самоиндукции здесь не при чем, поскольку индукционный ток в этом

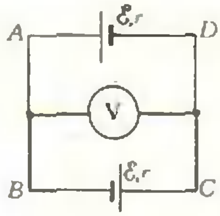


Рис. 3.

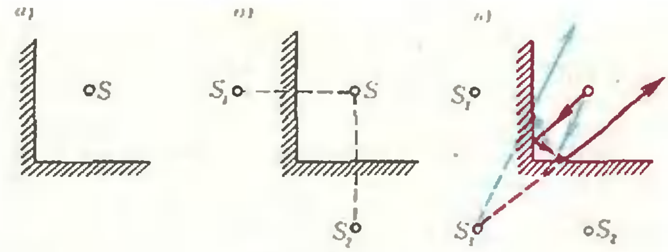


Рис. 4.

случае направлен против основного тока и лишь «тормозит» его нарастание до заданного значения. (Кстати сказать, в бытовой электросети индуктивность незначительна, так что индукционные токи практически никакой роли не играют.)

Что же происходит при включении лампочки? Пока ее нить накаливания не нагреется до температуры порядка 2400°С, ее сопротивление оказывается существенно меньше номинального, соответствующего раскаленной нити. При этом через лампочку течет ток, превышающий расчетное значение. Если в нити случайно появилась некоторая неоднородность, например уменьшение диаметра нити в каком-то месте, то это может привести к местному перегреву и разрушению нити лампочки.*)

Вопрос 10. Сколько изображений точки S получится в системе из двух взаимно перпендикулярных плоских зеркал (рис. 4, *а*)?

Характерный неправильный ответ. Два изображения: S_1 и S_2 (рис. 4, *б*).

Анализ ошибки. Кроме изображений S_1 и S_2, образованных лучами, отраженными только от одного зеркала, есть еще одно изображение — S_3 (рис. 4, *в*). Оно образовано лучами, отраженными сначала от одного зеркала, а потом от другого.

Вопрос 11. Почему при делении ядра урана выделяется энергия?

Характерный неправильный ответ. На каждую частицу в ядре приходится энергия связи около 7,5 МэВ; полная энергия связи составляет около 1800 МэВ. Таким образом, в ядре сосредоточена громадная энергия. Она освобождается при разрушении ядра.

Анализ ошибки. По определению энергия связи — это та энергия, которую надо затратить, чтобы разделить ядро на составляющие его частицы. Или, другими словами, это та энергия, которая выделяется при образовании ядра из отдельных частиц.

Какая же энергия освобождается при делении ядра урана? Дело в том, то энергия связи, приходящаяся на одну частицу в ядре урана, составляет 7,5 МэВ, а на каждую частицу осколков, образовавшихся при делении урана, приходится около 8,5 МэВ. Таким образом, на расщепление ядра урана надо затратить 7,5 МэВ энергии на каждую частицу, а при образовании осколков выделяется энергия 8,5 МэВ на каждую частицу. Разность этих энергий, которая в расчете на ядро составляет приблизительно 200 МэВ, и освобождается при делении ядра урана.

В заключение предлагаем читателям самостоятельно ответить на несколько опять-таки довольно простых вопросов.

1. Первую половину пути тело двигалось со скоростью 20 км/ч, а вторую — со скоростью 30 км/ч. Чему равна средняя скорость за все время движения?

2. В первом случае в шлюзе находится баржа, а во втором — легкая лодка. Одинаковую ли работу совершают в указанных случаях насосы, используемые для подъема уровня воды в шлюзе?

3. В сосуде, наполненом до краев водой, плавает льдинка, в которую вмерз пузырек воздуха. Перельется ли вода через край после того, как льдинка растает?

4. Вольтметр подсоединен к зажимам элемента. Может ли показание вольтметра быть больше ЭДС элемента?

5. Можно ли при помощи плоского зеркала получить на горизонтально лежащем листе бумаги изображение вертикально стоящего объекта?

*) Подробно о том, почему и как перегорают лампы накаливания, можно прочитать в статье А. Н. Петоева «Что случилось с лампочкой?» («Квант», 1983, № 8). (*Прим. ред.*)

Библиотечка «Квант»

Начиная с 1981 года издательство «Наука» Академии наук СССР выпускает специально для школьников серию научно-популярных книг Библиотечка «Квант». Авторы этих книг — известные ученые, работающие в самых разных областях физики и математики. Они интересно и доступно рассказывают о науке сегодняшнего дня, о новых идеях, экспериментах и, конечно, о практическом использовании науки. Книги этой серии отличает то, что в них не просто описываются факты и явления, излагаются теоремы и физические законы, но везде, где это можно сделать, даются глубокие объяснения, делаются качественные, а иногда и количественные оценки. Так что книги не только информируют читателя, но и учат его размышлять, формируют правильные физические, математические, мировоззренческие представления. Есть среди книг серии и такие, в которых углубленно рассматриваются вопросы школьных курсов физики и математики. Издано несколько задачников с интересными нестандартными задачами. Сейчас опубликовано уже около 30 выпусков серии. Нам хотелось бы рассказать о некоторых книгах, с которыми читатель сможет познакомиться в 1984 году.

Можно ли представить себе автомобиль, корпус которого после аварии восстанавливает свою форму, если его просто нагреть? Казалось бы, трудно. А между тем такой автомобиль уже сейчас можно сделать из специальных металлических сплавов, «помнящих» исходную форму. Об этом эффекте «памяти» металлов, о новых материалах, о сверхупругости и сверхпластичности рассказывается в книге В. А. Займовского и Т. Л. Колупаевой «Необычные свойства обычных металлов».

В книге М. Е. Левинштейна и Г. С. Симина «Знакомство с полупроводниками» рассказывается о многих интересных эффектах в полупроводниках, а также о том, как с их помощью измеряют температуру, деформацию, магнитные поля.

Из книги А. Д. Чернина «Звезды и физика» читатель узнает об удивительных астрофизических объектах, недавно открытых учеными, — пульсарах, квазарах, вспыхивающих рентгеновских звездах, о новейших гипотезах, о загадках астрофизики, которые ученым еще предстоит разрешить.

В журнале «Квант» много лет ведется раздел «Квант» для младших школьников». В нем публикуются статьи, для понимания которых нужны знания физики и математики в объеме 6—7 классов. Лучшие статьи из этого раздела отобраны для сборника «Занимательно о физике и математике» (составители С. С. Кротов и А. П. Савин). В книгу включены также около 100 любопытных задач и описания изящных опытов, которые читатели могут воспроизвести в домашних условиях.

Всего в 1984 году издательство «Наука» планирует выпустить 10 книг серии Библиотечка «Квант». Заказы на них можно оформить в книжных магазинах.

С этого номера мы начинаем публиковать материалы XVII Всесоюзной физико-математической олимпиады школьников.

Ниже приводятся задачи начальных этапов этой олимпиады на примере Московской городской олимпиады по физике и Свердловской областной олимпиады по математике. В следующих номерах будет рассказано о Всероссийской олимпиаде и о заключительном туре XVII Всесоюзной физико-математической олимпиады школьников.

Напоминаем, что следующая XVIII Всесоюзная олимпиада начнется в ноябре с. г. и будет проходить в несколько этапов: в ноябре — декабре пройдут школьные, районные и городские олимпиады, в январе 1984 г. — республиканские (АССР), краевые и областные, в марте — олимпиады союзных республик, в апреле состоится заключительный тур и закрытие олимпиады.

Мы надеемся, что публикуемые ниже задачи будут полезны вам при подготовке к очередной Всесоюзной олимпиаде школьников.

Московская городская олимпиада по физике 1982/83 года

Районный тур

8 класс

1. На столе лежит круглая коробка внутренним диаметром D, а в ней — шайба радиуса R. Трение между коробкой и шайбой отсутствует. Коробку как целое начинают двигать с постоянной скоростью v_0, направленной вдоль линии центров коробки и шайбы. В момент времени $t = t_0$ шайба ударяется о коробку. Считая все удары абсолютно упругими, найти зависимости от времени положения центра шайбы $x_ш$ и ее скорости $v_ш$ относительно стола, начиная с момента t_0. Построить графики $x_ш(t)$ и $v_ш(t)$.

2. К концу однородной палочки массы 4,4 г подвешен на невесомой нити однородный алюминиевый шарик радиуса 0,5 см. Палочку кладут на край стакана с водой, добиваясь такого положения равновесия, при котором погруженной в воду окажется половина шарика. Определить, в каком отношении делится длина палочки точкой опоры. Плотность алюминия $2{,}7 \cdot 10^3$ кг/м^3, плотность воды 10^3 кг/м^3. Силами поверхностного натяжения на границе шарика и воды пренебречь.

3. Две жестко скрепленные в виде буквы Г однородные палочки одинаковой длины с массами m_1 и m_2 образуют прямой угол и лежат на шероховатой горизонтальной поверхности. Систему тянут с помощью нити, прикрепленной к вершине угла и параллельной поверхности. Какой угол α составляет нить с палочкой массы m_1?

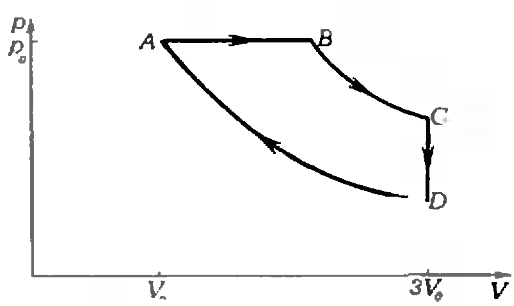
4. К проволочному каркасу в виде тетраэдра в двух вершинах подключено постоянное напряжение U. Сопротивление каждого ребра равно R. Исключение какого из ребер каркаса приведет к наибольшему изменению тока I в цепи? Чему равно это максимальное изменение тока ΔI_{max}? Сопротивлением подводящих проводов пренебречь.

9 класс

1. Две жестко связанные однородные палочки одинаковой длины с массами m_1 и m_2 образуют букву Т, лежащую на шероховатой горизонтальной поверхности (палочка массы m_2 прикреплена к середине палочки массы m_1). Систему тянут параллельно поверхности нитью, привязанной к концу палочки массы m_1. Какой угол α составляет нить с палочкой массы m_1?

2. Три небольших тела масс $3m$, $4m$ и $5m$ закреплены в трех различных точках внутри гладкой неподвижной полусферической чаши радиуса R. Большой круг чаши горизонтален. В некоторый момент времени тела отпускают. Все соударения абсолютно неупругие — тела слипаются и далее движутся вместе. Какое максимальное количество теплоты может выделиться в этой системе? При каком начальном расположении тел это осуществится?

3. Состояние идеального газа изменяется по циклу $ABCDA$, изображенному на рисунке.



В таблице указаны состояния этого газа и их параметры, соответствующие точкам цикла A, B, C, D (начальное состояние изображается точкой A).

	p	V	T
A	p_0	V_0	T_0
B	p_0	?	$2T_0$
C	?	$3V_0$	$2T_0$
D	?	$3V_0$	T_0

Определить недостающие параметры состояния газа в точках B, C и D и заполнить таблицу.

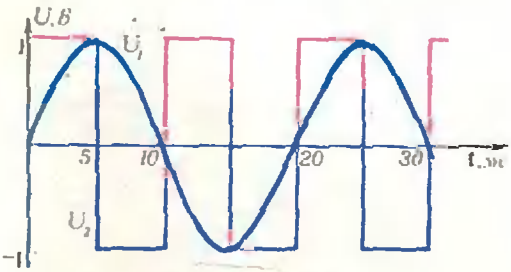
4. В цилиндре под невесомым поршнем содержится азот. Его масса 2,8 г, температура

27 °C и давление в 2 раза больше атмосферного. При закрепленном поршне цилиндр охлаждали, пока давление в нем не сравнялось с атмосферным. Затем поршень освободили и нагрели цилиндр до первоначальной температуры. Определить работу, совершаемую газом. Молярная масса азота 28 г/моль, универсальная газовая постоянная 8,3 Дж/(моль • К).

5. Три конденсатора, емкости которых равны C_1, C_2 и C_3, одними концами соединены вместе в точке O. Потенциалы других концов равны: φ_1 (у конденсатора C_1), φ_2 (у C_2) и φ_3 (у C_3). Определить потенциал общей точки φ_O.

10 класс

1. На пластины горизонтального отклонения луча осциллографа подается напряжение $U_1(t)$, а на пластины вертикального отклонения луча — напряжение $U_2(t)$. Графики $U_1(t)$ и $U_2(t)$ изображены на рисунке.



Чувствительность осциллографа по каналам горизонтального и вертикального отклонений одинакова и равна 2 см/В. Нарисовать траекторию луча на экране. Описать подробнее с точки зрения относительной яркости наблюдаемую картину.

2. Сиденье качелей привязано двумя веревками к столбам, длина одной веревки l_1, второй l_2, и первая привязана на b выше другой (веревки прямолинейны). Расстояние между столбами качелей равно a, причем $l_1^2+l_2^2=a^2+b^2$. Найти период малых «качаний» на таких качелях. Размерами человека и сиденья можно пренебречь по сравнению со всеми указанными выше длинами.

3. Электрон влетает в область пространства с однородным электрическим полем с напряженностью $6 \cdot 10^4$ В/м перпендикулярно линиям напряженности. Определить величину и направление индукции B магнитного поля, которое надо создать в этой области для того, чтобы электрон пролетел ее, не испытывая отклонений. Энергия электрона $1{,}6 \cdot 10^{-16}$ Дж, масса $9 \cdot 10^{-31}$ кг.

4. Контур состоит из последовательно соединенных конденсатора емкости C, катушки индуктивности L, источника постоянного напряжения с ЭДС, равной $\mathcal{E}$, и ключа К. В начальный момент конденсатор заряжен до напряжения U_0, ключ К разомкнут. Определить, до какого максимального напряжения перезарядится конденсатор после замыкания ключа.

5. Предположим, что ваш собеседник носит очки. Сможете ли вы определить, какой у него дефект зрения — дальнозоркость или близорукость? Естественно, как воспитанный человек, вы при этом не станете просить собеседника дать вам примерить его очки и вообще не будете заводить о них разговор.

I Городской тур

8 класс

1. При движении паровоза по закруглению радиуса $R = 200$ м дует горизонтально направленный ветер. Форма дымового следа изображена на рисунке (вид сверху).

Определить, используя рисунок, скорость ветра, если известно, что она постоянна, а скорость паровоза равна 36 км/ч.

2. Из трех точек А, В и С, находящихся на наклонной площадке в поле силы тяжести, одновременно бросают три тела. Известно, что: а) если не бросать тело С, то два других столкнутся в процессе движения; б) если не бросать тело В, то тела А и С также столкнутся, но раньше, чем в первом случае. Столкнутся ли тела В и С, если не бросать тело А? Точки А, В и С в начальный момент расположены на одной прямой, причем В между А и С. Считать, что до поверхности Земли тела долететь не успевают.

3. На шероховатый выступ в форме цифры 1, скругленный сверху, кладут однородный по длине мягкий канат, причем на наклонной части выступа оказывается кусок длины l. При какой минимальной длине вертикально свисающей части канат начнет скользить вправо? Коэффициент трения равен μ. Выступ (канат) образует угол α.

4. Два одинаковых проволочных резистора А и Б соединены параллельно, а последовательно с ними включен амперметр и источник тока. Средняя точка резистора А соединена с подвижным контактом, касающегося резистора Б. Ток, протекающий через амперметр, при неизменном напряжении источника тока зависит от положения подвижного контакта. Во сколько раз максимальный ток амперметра превосходит минимальный? (Сопротивлением амперметра, соединительных проводов и внутренним сопротивлением источника тока пренебречь.)

9 класс

1. В теле массы M сделан канал АБ, все точки которого лежат в одной и той же вертикальной плоскости. Разность высот между точками А и Б канала равна h. Это тело стоит на гладкой горизонтальной поверхности, а другое тело массы m сначала покоится в верхней точке А канала, а затем соскальзывает по каналу. С какой скоростью будет двигаться

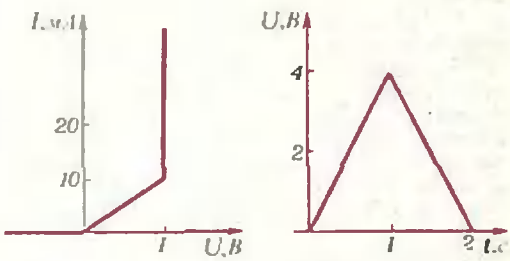
тело массы M, когда тело массы m покинет канал? (Скорость второго тела при выходе из канала горизонтальна.)

2. Тонкостенный заполненный газом цилиндр массы M, высоты H и площадью основания S плавает в воде. В результате потери герметичности в нижней части цилиндра глубина его погружения увеличилась на ΔH. Каково было начальное давление газа в цилиндре? Атмосферное давление p_a, температура не меняется.

3. Известно, что если обычную воду подсолить, то температура ее кипения станет выше. Как при этом изменится плотность насыщенных водяных паров при температуре кипения?

4. Равномерно заряженная по длине полуокружность радиуса R находится в поле заряда q, равномерно распределенного по поверхности сферы вдвое меньшего радиуса. Определить силу, действующую на сферу, если суммарный заряд полуокружности равен q, а их центры совпадают.

5. Диод соединен последовательно с сопротивлением $R = 100$ Ом. Идеализированная вольтамперная характеристика диода приведена на рисунке. На вход схемы подается меняющееся во времени напряжение U (см. рисунок).



Как будет меняться напряжение на сопротивлении R от времени?

10 класс

1. Почему при повороте автомобиль «приседает» на внешние, по отношению к окружности поворота, колеса?

2. Силовая линия выходит из положительного заряда $+q_1$ под углом α к прямой, соединяющей его с отрицательным точечным зарядом $-q_2$. Под каким углом β к той же прямой эта силовая линия войдет в заряд $-q_2$?

3. Вторичная обмотка идеального трансформатора с коэффициентом трансформации $1:n$ замкнута на катушку индуктивности L. Частота тока в первичной обмотке 50 Гц. Найти сдвиг фаз между напряжением и током в первичной обмотке трансформатора. Как изменится сдвиг фаз, если в первичную обмотку включить резистор R?

4. Батарея из двух последовательно соединенных конденсаторов емкости C каждый заряжена до разности потенциалов U и в начальный момент времени подключена к катушке индуктивности L, так что образовался колебательный контур. Спустя время τ один из конденсаторов пробивается, и сопротивление между его обкладками становится равным нулю. Найти амплитуду колебаний заряда после пробоя.

5. В днище судна сделан стеклянный иллюминатор для наблюдения за морскими животными. Диаметр иллюминатора равен 40 см и много больше толщины стекла. Какова площадь обзора дна из такого иллюминатора? Показатель преломления стекла 1,6; воды 1,4; расстояние до дна 5 м.

Публикацию подготовил *С. С. Кротов*

Свердловская областная олимпиада по математике 1982/83 года

Школьный тур

7 класс

1. Около каждой вершины треугольника поставлено некоторое число. Напишите возле каждой стороны этого треугольника число, равное сумме чисел, стоящих у ее концов. Теперь каждое число, стоящее около вершины сложите с числом, стоящим около противоположной стороны. Доказать, что все три полученные суммы будут равны.

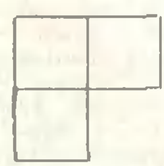
2. Доказать, что $x^4 - x + 1 > 0$.

3. Доказать, что средняя линия треугольника делит пополам пересекающую ее медиану.

4. Доказать, что для любого натурального числа n дробь $(n^2 + 3n + 3)/(n + 1)$ несократима.

8 класс

1. На листе клетчатой бумаги 1982×1982 в каждой клетке написано число. Известно, что в каждых трех клетках, накрываемых фигурой



сумма чисел равна 3. Доказать, что все числа равны 1.

2. Девять одинаковых книг стоят 11 рублей с копейками, а тринадцать таких книг стоят 15 рублей с копейками. Сколько стоит одна книга?

3. Внутри треугольника ABC на медиане AM лежит точка O. Доказать, что площади треугольников AOC и AOB равны.

4. Пусть p — простое число. Сколько существует натуральных чисел, меньших p^2 и взаимно простых с p?

9 класс

1. Дано 110 различных натуральных чисел. Доказать, что найдутся 2 числа, совпадающие не менее чем в двух разрядах.

2. Доказать, что $a + b \leqslant 4$, если $a^2 + b^2 \leqslant 4$.

3. Пусть средние линии четырехугольника делят его площадь пополам. Доказать, что этот четырехугольник — параллелограмм.

4. Доказать, что в натуральном ряду сразу после простого числа, большего трех, не может стоять точный квадрат.

10 класс

1. Придумать набор из 1982 попарно различных целых чисел $\{a_1, a_2, ..., a_{1982}\}$, чтобы множество сумм $S=\{a_1+a_2, a_1+a_3, ..., a_{1981}+a_{1982}\}$ содержало как можно меньше различных чисел. Доказать, что найденное вами S не может содержать меньшее количество различных чисел.

2. Доказать, что квадратный трехчлен $f(x)=ax^2+bx+c$ можно представить в виде разности двух монотонно возрастающих многочленов.

3. Прямоугольник $ABCD$ лежит внутри четверти круга с центром в точке A радиуса 1. Какова наибольшая возможная площадь прямоугольника?

4. Пусть $2a$, $a+b$, c — целые числа. Доказать, что для любого целого x число ax^2+bx+c — также целое.

Районно-городской тур
(по районам области и г. Свердловску)

7 класс

1. Имеется два ведра емкостью 9 и 11 литров. Как с их помощью налить из озера в большее из них 10 литров воды?

2. Доказать, что если

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c},$$

то $(a^3+b^3)(a^3+c^3)(b^3+c^3)=0$.

3. Из точки O выходят два луча. Проверить, пользуясь только циркулем, равняется ли угол между ними 72°.

4. Найти все натуральные числа m и n, удовлетворяющие равенству $2^m+1=n^2$.

8 класс

1. Пусть n и k — натуральные числа $(k<n)$, $[a; b]$, $[a_1; b_1]$, $[a_2; b_2]$, ..., $[a_n; b_n]$ — отрезки на числовой прямой. Известно, что число отрезков $[a_i; b_i]$, содержащих точку $x\in[a; b]$, равно k для любой точки $x\in[a; b]$. Доказать, что при любом $i=1, 2, 3, ..., n$ $[a; b]\subset[a_i; b_i]$. (Предполагается, что для любого i $[a; b]\cap[a_i; b_i]$ непусто.)

2. Доказать, что $a^4+b^4\geqslant 1/8$, если $a+b\geqslant 1$.

3. Доказать, что в выпуклом четырехугольнике сумма длин диагоналей больше суммы длин отрезков, соединяющих середины противоположных сторон.

4. Натуральное число n таково, что числа $2n+1$ и $3n+1$ являются квадратами некоторых натуральных чисел. Докажите, что число n делится на 8.

9 класс

1. Роща имеет форму круга диаметром 100 м. Расстояние между любыми двумя деревьями в ней больше 10 м. Доказать, что в роще не больше 121 дерева.

2. Доказать, что система уравнений

$$\begin{cases} x^3+y^2=2, \\ x^2+xy+y^2-y=0 \end{cases}$$

не имеет решений в действительных числах.

3. Пусть в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки M и N — середины диагоналей AC и BD. Выразить вектор $\vec{MN}$ через векторы $\vec{AD}$ и $\vec{CB}$.

4. Найти четырехзначное натуральное число, у которого две первые и две последние цифры совпадают и которое является квадратом натурального числа.

10 класс

1. Дан числовой интервал $]a; b[$ и семейство интервалов $]a_1; b_1[$, $]a_2; b_2[$, ..., $]a_n; b_n[$, вложенных в $]a; b[$. Известно, что для любой точки $x\in]a; b[$ число интервалов $]a_i; b_i[$, содержащих ее, нечетно. Доказать, что n нечетно.

2. Доказать тождество

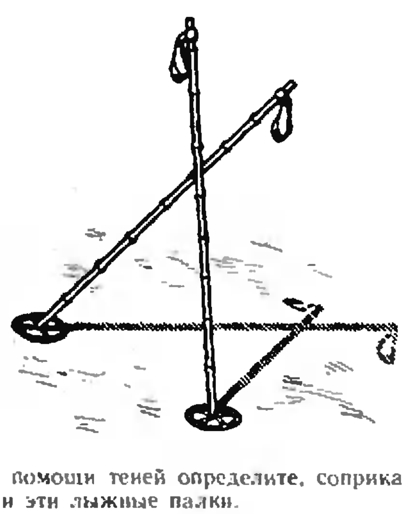
$$\frac{1}{\cos 0\cos x}+\frac{1}{\cos x\cos 2x}+...+\frac{1}{\cos 9x\cos 10x}=\frac{\operatorname{tg} 10x}{\sin x}.$$

3. Указать, каким необходимым и достаточным условиям должны удовлетворять выпуклые четырехугольники единичной площади, сумма диагоналей у которых минимальна.

4. Найти все натуральные числа m, n и k, удовлетворяющие равенству $2^m+1=n^{k+1}$.

Публикацию подготовил
А. Г. Гейн

Лыжи — летом



При помощи теней определите, соприкасаются ли эти лыжные палки.

Квадратный трехчлен

6. Условиям удовлетворяют следующие пары чисел: $\{p=-2,\ q=-1\}$ и $\{p=1,\ q\leqslant 1/4\}$. Указание. Из существования корней следует неотрицательность дискриминантов, значит, $q\leqslant 1/4$. Из формул Виета для первого уравнения $x_1+x_2=-p$, $x_1x_2=q$ для второго (числа x_1+1 и x_2+1 — его корни) $x_1+x_2+2=p^2$, $(x_1+1)(x_2+1)=pq$. Отсюда получаем систему

$$\begin{cases} p^2+p-2=0, \\ (1-p)(q-1)=0, \end{cases}$$

которую следует решить, учитывая условие $q\leqslant 1/4$.

7. Указание. Из формулы Виета следует, что абсцисса середины отрезка, по которому прямая $y=kx+d$ пересекает параболу, равна $(b-k)/2a$, то есть не зависит от d.

8. $c<0$. Указание. Так как $f(-1)=a-b+c<0$ и корней нет, график целиком лежит в нижней полуплоскости и $f(0)=c<0$.

9. Указание. Нарисуйте график в двух случаях $a>0$ и $a<0$ и заметьте, что знаки $f(x_0)$ и a — противоположны.

10. $c<0$. Указание. У $f(x)$ либо нет корней, тогда $f(0)=c<0$ (ибо $a<0$), либо оба корня отрицательны, тогда $0\notin[x_1, x_2]$, откуда снова $f(0)=c<0$.

11. Указание. Если оба уравнения не имеют корней, то $p_i^2-4q_i<0$, $i=1, 2$. Складывая эти два неравенства и воспользовавшись условием, можно получить противоречие в виде $(p_1-p_2)^2<0$.

12. а) Не может; б) может. Указание. Числа $x_{1,2}=2\pm\sqrt{3}$ являются корнями уравнения $(x-x_1)(x-x_2)=x^2-2x-1=0$.

13. Указание. Подставляя в уравнение корень вида s/r, $s, r\in Z$, $r\neq 1$ (где дробь s/r — несократима), получаем $s^2=-(ps+qr)r$, откуда следует, что s делится на r — противоречие!

14. Пусть x_0 — общий нецелый корень исходных уравнений. Это означает, что $x_0^2+p_1x_0+q_1=0$, $x_0^2+p_2x_0+q_2=0$. Вычитая из первого равенства второе, получаем

$$x_0(p_1-p_2)+q_1-q_2=0. \quad (*)$$

Рассуждая от противного, предположим, что $p_1\neq p_2$. Тогда из равенства $(*)$ следует, что корень x_0 является числом рациональным, так как $x_0=\dfrac{q_2-q_1}{p_1-p_2}$. Но в задаче 13 доказано, что в этом случае x_0 — обязательно целый корень, а это противоречит условию данной задачи. Следовательно, $p_1=p_2$, а тогда из равенства $(*)$ вытекает, что $q_1-q_2=0$, то есть $q_1=q_2$.

Характерные ошибки на экзаменах по физике

1. Характерный неправильный ответ: 25 км/ч. Правильный ответ: 24 км/ч.

2. Характерный неправильный ответ: в первом случае работа больше. Правильный ответ: в обоих случаях работа одинакова.

3. Характерный неправильный ответ: перельется. Правильный ответ: не перельется.

4. Характерный неправильный ответ: не может. Правильный ответ: может, если ток через элемент течет в направлении, противоположном направлению тока, создаваемого самим элементом.

5. Характерный неправильный ответ: можно, для этого надо наклонить зеркало под углом 45° к плоскости листа. Правильный ответ: нельзя, потому что изображение, создаваемое плоским зеркалом, всегда мнимое.

Лыжи летом

(см. с. 61)

Не соприкасаются. Действительно, прямая, проходящая через точку пересечения теней параллельно прямым, соединяющим концы палок с их тенями, не проходит через точку, где одна палка закрывает другую.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 7)

1. Пять раз. Перенумеруем лампочки и запишем номера зажженных. Затем начнем последовательно переключать выключатель, каждый раз записывая номера тех из них, которые при этом загораются. Перегоревшими окажутся те лампочки, номера которых ни разу не будут нами записаны после пяти поворотов переключателя.

2. 125 и 375. Запишем условие задачи в виде равенства:

$$100a+10b+c=(10b+c)c.$$

Очевидно, что $c\neq 0$. Перепишем равенство в виде

$$100a=(10b+c)(c-1)$$

Левая часть делится на 25, следовательно, и правая должна делиться на 25. Но если $c-1$ делится на 5, то $10b+c$ уже не делится на 5, что невозможно. Значит, $10b+c$ делится на 25, что возможно, лишь когда это число равно 25 или 75 (вспоминаем, что $c\neq 0$), то есть возможны лишь числа 125 и 375.

3. Когда мы пишем числа в кружочках, то число, стоящее в средней клетке, входит во все четыре суммы, числа, стоящие у середин сторон, входят каждое в две суммы, а угловые числа — каждое лишь в одну сумму. Поэтому, чтобы получить наибольшее окончательное число, нужно в центральную клетку поставить самое большое число — 9, в угловые — самые маленькие числа 1, 2, 3, 4, а в остальные — числа 5, 6, 7, 8. В результате получаем число 49/8.

4. Разлив можно провести, например, в соответствии со следующей таблицей:

Бочка		18	14	14	10	10	6	6	6	2	2	9	9	5	5	1	8	8	4	11	11	7	7	3	3	10	10	6	6
черпак		0	4	0	4	0	4	1	0	4	2	2	0	4	0	4	4	0	4	1	0	4	0	4	2	2	0	4	0
ВЕДРО	1	0	0	0	0	4	4	4	5	5	7	7	7	7	7	7	0	4	4	7	0	1	1	5	5	7	0	2	6
ведро	2	0	0	4	4	4	4	7	7	7	7	0	2	2	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6

5. Днем, если в комнате не включено освещение, предметы, находящиеся в ней, освещены гораздо слабее, чем на улице. С улицы мы наблюдаем предметы в комнате через занавеску, освещенность которой больше освещенности предметов. Из комнаты мы видим предметы на улице через почти неосвещенную занавеску, потому что внутренняя сторона занавески освещена очень слабо. Заметьте, что вечером при включенном освещении в комнате эффект будет обратный — с улицы будет видно хорошо все происходящее в комнате.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 8)

1. $$\begin{array}{r} +\,6823 \\ 6823 \\ \hline 13646 \end{array}$$

2. Пусть шестизначное число будет A, а его первая цифра — a. Если убрать первую цифру, полученное число запишется как $A - 100\,000\,a$. Число, полученное из него приставлением сзади цифры a, будет $10(A-100\,000\,a)+a$ или $10\,A-999\,999\,a$. Но $999\,999=7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 27$. Поэтому если число A делилось на какой-либо из этих сомножителей, то на него будет делиться и новое число.

3. Один из возможных способов решения задачи представлен на рисунке 1.

4. Первая комната — 7×3, вторая — 5×3. Обозначим длины сторон первой комнаты через x и y. Тогда из условия задачи $xy=2(x+y)+1$. Отсюда

$$y = \frac{2x+1}{x-2} = 2+\frac{5}{x-2}.$$

Чтобы y было целым при целом x, нужно чтобы $x-2=1$ или $x-2=5$. В первом случае получаем $x=3$, $y=7$, а во втором случае $x=7$, $y=3$. Аналогично для второй комнаты.

5. Врач ответил, что холодное зеркальце во рту запотевает, так как на нем конденсируются водяные пары, выдыхаемые пациентом. Если зеркальце нагреть до температуры человеческого тела или выше, то конденсация не будет происходить.

Степа Мошкин путешествует
(см. «Квант» № 8)

Первый вопрос Петра Ивановича. То, что белье на веревке на берегу и флаг над школой висят неподвижно, означает, что погода безветренная. Так как плот перемещается относительно воздуха, на плоту возникает небольшой ветерок, поэтому флаг на плоту полощется.

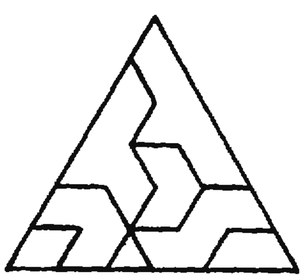


Рис. 1.

Второй вопрос Петра Ивановича. Все плывущие по реке тела перемещаются относительно берегов со скоростью, равной скорости течения реки.

Тот факт, что ветка, плывущая у берега, отстает от плота, означает, что скорость течения у берегов меньше, чем на середине реки. Это связано с тем, что между водой и дном реки существует трение. Чем больше глубина, тем меньше сказывается это трение на скорости течения воды у поверхности.

1. Плот плыл по отношению к берегам со скоростью течения, равной 4 км/ч.

2. Течение несло плот и Гобоя с одной и той же скоростью. Значит, Гобой приближался к плоту со скоростью 5 км/ч.

3. Скорость Гобоя относительно берегов складывается из скорости течения реки и «собственной» скорости Гобоя относительно неподвижной воды. Следовательно, относительно берегов Гобой плыл со скоростью 9 км/ч.

4. 1 км/ч.

5. 5 км/ч. Этот ответ может показаться неверным. Однако он верен. Представьте, что вы идете по движущемуся вагону. Идете ли вы по ходу поезда или в противоположном направлении, скорость ваша по отношению к вагону одна и та же. Реку можно считать своеобразным вагоном, везущим пассажиров и собаку. При этом пассажиры сидят неподвижно, а собака бежит к ним по вагону со скоростью 5 км/ч.

Степина задача про Гобоя. На рисунке 2

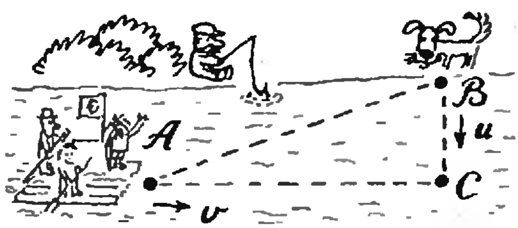


Рис. 2.

$|AB|=50$ м; $|AC|=v\cdot t = \frac{4000\ \text{м}}{3600\ \text{с}}\cdot 36\text{с} = 40$ м; $|BC|=\sqrt{|AB|^2-|AC|^2}=30$ м. Следовательно, Гобой удалялся от берега со скоростью $u=\frac{|BC|}{t}=\frac{30\ \text{м}}{36\ \text{с}}=3\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

6. Скорость света равна 300 000 км/с. На прохождение расстояний, с которыми имели дело путешественники, свету понадобится ничтожно малое время. Поэтому можно считать, что такие малые расстояния свет проходит мгновенно.

7. Нет, так как работа в любом случае равна потенциальной энергии, которой обладает Ваня, сидя на суку.

8. До преграды звук шел 1/2 с, скорость звука — приблизительно 330 м/с; следовательно, расстояние до преграды — примерно 115 м.

Последний вопрос Петра Ивановича. Способ приближенного определения размеров Луны

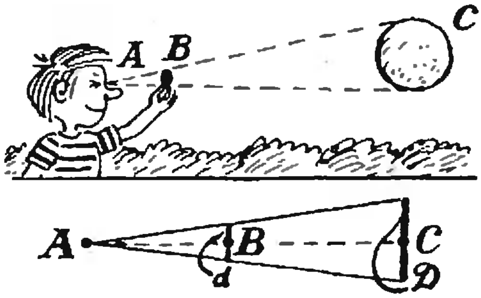


Рис. 3.

ясен из рисунка 3: помещая перед глазами какой-нибудь круглый предмет, добейтесь, чтобы он целиком перекрывал лунный диск. Измерив расстояние AB и размер d предмета, зная расстояние AC от Земли до Луны, легко вычислить размер D Луны:

$$\frac{|AB|}{d}=\frac{|AC|}{D}\Rightarrow D=\frac{|AC|d}{|AB|}.$$

Шахматная страничка
(см. «Квант» № 6)

Задание 11 (М. Кляцкин, 1924 г.). **1. Л:b3! cb 2.g6! Ф:g8 3.Крс5 d6+ 4.Kpd4 d5 5.Крс5 d4 6.Кр:d4 Кре8 (Фh8) 7.f7 (g7)+** и белые выигрывают.

Задание 12 (Г. Заходякин, 1939—40 гг.). **1.g7 h2 2.ghФ h1Ф+ 3.Kpg3! Фg1+ 4.Kpf4 Фf2+ 5.Kpg4 Фg2+ 6.Kpf5! Фf3+ 7.Кре6 Фd5+ 8.Kpf6 Фd4+ 9.Kpf7 Ф:h8 10.Cd8 Kpd7 11.c8Ф+! Кр:c8 12.Cf6 h6 13.g6!** и черный ферзь в капкане.

Номер оформили:
Т. Н. Кольченко, А. М. Кошевой, Н. С. Кузьмина, Ю. П. Мартыненко, И. В. Мудрова, Э. В. Назаров, Н. А. Полянская, В. М. Скрылев, Е. К. Тенчурина
Фото: А. Н. Виленкин, С. Н. Ермакова, В. П. Шевченко

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Главный художник Э. А. Смирнов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Т. С. Вайсберг

103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1.
«Квант», тел. 250-33-54

Сдано в набор 18.7.83. Подписано к печати 12.8.83.
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16
Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 6,99 Т-17646
Цена 40 коп. Заказ 1907. Тираж 166 567 экз.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

РЕШИЛ ЖРЕБИЙ

Совсем недавно одновременно завершилось так много крупных шахматных состязаний, что мы просто не могли остаться в стороне от них. В прошлый раз сообщалось о победе Каспарова в его четвертьфинальном матче претендентов. А сейчас вам, наверное, уже известны результаты двух полуфинальных матчей Г. Каспаров — В. Корчной и В. Смыслов — З. Рибли. Любопытно, что впервые в истории борьбы за мировую корону в «борьбу» вмешался жребий. Матч между Смысловым и Хюбнером дал равный счет 5:5, не изменили положение и четыре дополнительные встречи, закончившиеся вничью. Победителя должен был определить жребий. В ход была пущена рулетка — Смыслов поставил на красный цвет, Хюбнер — на черный. Западногерманский гроссмейстер не выдержал испытания и уехал домой. Смыслов мужественно ждал решения судьбы и лично присутствовал на жеребьевке.

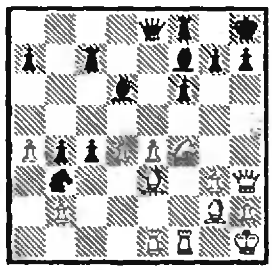
Те, кто видел рулетку (упрощенный вариант ее, под названием «Карусель», продается в магазинах игрушек), знают, что на игровом поле имеются две ничейные зоны, называемые «зеро» (на них записан ноль). Если шарик попадает в эти зоны, то никто не выигрывает. Вероятность такого события очень мала, например, в «Карусели» она равна 1/50 (ноль записан на двух зонах из 100), и все же...

Наверное, вы уже догадались, что, после того как рулетка была закручена и остановилась, шарик оказался в нейтральной зоне, и счет стал $7\frac{1}{2}:7\frac{1}{2}$! Еще одна дополнительная «партия», и на этот раз шарик выбирает красный цвет. Смыслов в полуфинале!

Хотя читатели «Кванта» по своему возрасту должны болеть за молодых шахматистов, надо отдать должное 62-летнему гроссмейстеру, показавшему великолепный образец творческого долголетия.

Посмотрите, с каким юношеским задором провел Смыслов заключительную атаку в четвертой партии матча.

В. Смыслов — Р. Хюбнер



27.e5! fe 28.de C:e5 29.Ce4 g6 30.C:g6 Фa8+31. Kpg1 Cg8 32.C:h7 Л:h7 33.Kg6+Kpg7 34.Фd7+Лf7 35.Л:f7+C:f7 36.K:e5 Фd5 37.Ф:a7 Лh5 38. K:f7 Ф:f7 39.Cd4+K:d4 40.Ф:d4+Kph7 41. Фe4+ Kpg7 42.Лf1 Фa7+ 43. Лf2 Фc5 44.Kpf1 c3 45.bc bc 46.Фe6 Фg5 47.Лf7+Kph8 48.Фc8+. Черные сдались ввиду неизбежного мата.

Напомним полуфинальные пары претенденток: Н. Александрия — И. Левитина, Н. Иоселиани — Л. Семенова. Таким образом, дальнейший розыгрыш шахматной короны среди женщин вновь стал нашим внутренним делом.

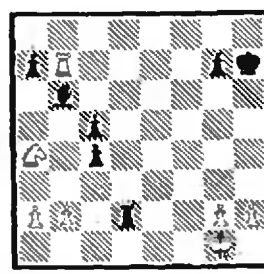
Пока претенденты выясняют, кто из них достойнее, чемпион мира принял участие в юбилейном, 50-м чемпионате страны. В начале турнира А. Карпов, как это часто с ним бывает, держался в тени, но затем увеличил скорость и уверенно завоевал золотую медаль.

А. Карпов — Е. Геллер
Испанская партия

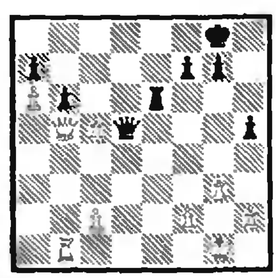
1.e4 e5 2.Kf3 Kc6 3.Cb5 a6 4.Ca4 Kf6 5.0—0 Ce7 6.Лe1 b5 7.Cb3 0—0 8.d3 Cb7 9.Kbd2 h6 10.Kf1 Лe8 11.Ke3 Cf8 12.Cd2 d6 13.a4 Kd7 14.c3 Ke7 15.Фb1 Kc5 16.Cc2 d5. Каждый шахматист с детства знает, что если белые робко действуют в испанской партии, то черные контрударом d6—d5 перехватывают инициативу. Но данная партия представляет собой исключение из правил. Не успели черные провести это программное продвижение, как их позиция стала на глазах разваливаться. **17.ed K:d5 18.Kg4!** Конь как бы повис в воздухе, ведь белая пешка «h» не поддерживает его по старинке. **18...Kf4 19.C:f4 ef 20.Kge5 Cd6 21.d4.** 13 ходов ждала белая пешка «d» своего часа. Теперь, когда она заняла положенное ей место, даже ферзь на b1 оказался при деле, одна из угроз 22.Ch7+Kph8 23.K:f7×.

21...C:e5 22.K:e5 Фg5 23.f3 Лad8 24.ab ab 25.Лa7! Cd5 26.Л:c7 Ka6 27.Лa7 Kc5 28. Ch7+Kpf8 29.b4 Ka4 30.Фd3 Cc4 31.Ф:c4! Эффектный финал: белые жертвуют ферзя, а черные в ответ сдаются.

Конкурсные задания



17. Ход черных. Оцените позицию.



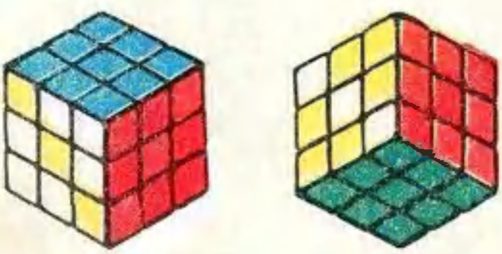
18. Ход белых. Оцените позицию.

Срок отправки решений — 25 ноября 1983 г. (с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс», задания 17, 18»).

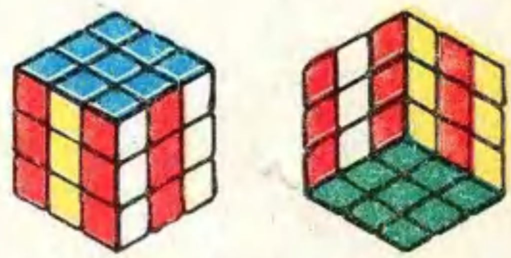
Цена 40 коп.
Индекс 70465

Если вы уже научились собирать кубик Рубика (один из алгоритмов сборки приводится в статье «Кубик в картинках» в этом номере), можно попробовать свои силы в составлении симметричных узоров на его поверхности, например тех, что приводятся на этой странице обложки. В принципе это не так уж трудно, но если вам во всех случаях (кроме одного) удастся уложиться (исходя из «правильного» состояния) в 40 «ходов» — поворотов граней, можете считать себя «гроссмейстером кубика». В исключительном же случае и 1000 ходов не хватит, потому что — да не обидится на нас читатель — один из изображенных нами узоров получить вообще невозможно. (Обнаружить его вам поможет статья «Математика волшебного кубика» — «Квант», 1982, № 8.) Решения будут опубликованы в следующем номере журнала. Если вам удастся найти более короткие решения, пришлите их в редакцию.

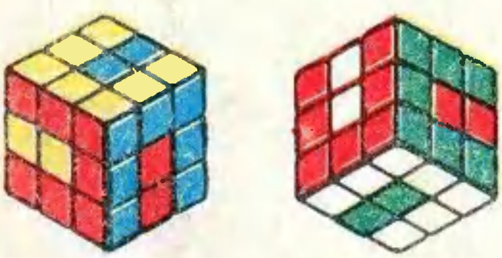
Необходимое пояснение: каждый узор показан с двух сторон, так что видны все шесть граней кубика. Исходная расцветка кубика такова: верхняя грань — синяя, нижняя — зеленая, передняя — желтая, задняя — белая, правая — оранжевая, левая — красная.



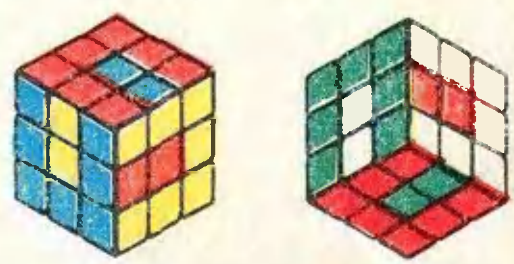
Зигзаг



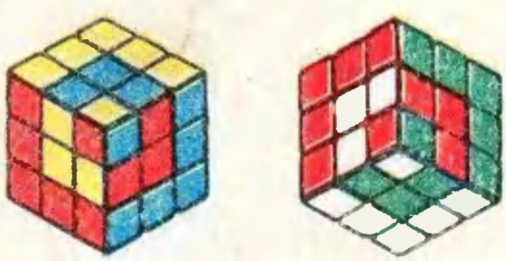
Полосы



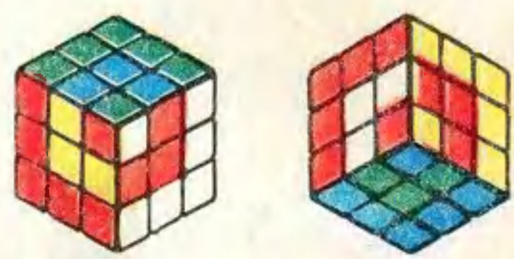
Тройные крюки



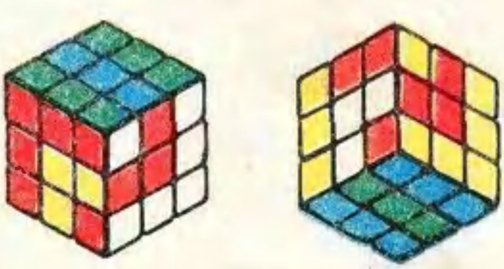
Шесть П



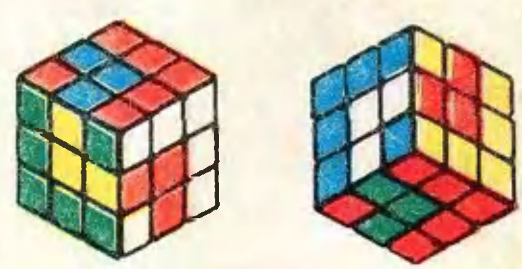
Кольца



Потусторонние кольца



Змея



Червяк